



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2020/21
4. forduló

- Adja meg azt a $c \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós számot, amely esetén a $c \cdot \ln(x)$ és az x^3 függvények grafikonjainak pontosan egy közös pontja van. Ez a pont érintési pontja-e a két görbének¹⁾? (10 pont)
- Határozza meg az $\int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$ primitív függvényt²⁾. (10 pont)
- a) Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy valós számsorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Igazolja, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor *pontosan akkor* konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ sor konvergens.
b) Adjon példát olyan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozatra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, de a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ sor konvergens. (8+2 pont)
- Legyenek $b, c \in \mathbb{Z}$ tetszőleges egész számok, legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ egyenlet egyik gyöke, és legyen $\mathbb{Z}[\alpha] := \{x + y\alpha : x, y \in \mathbb{Z}\}$.
Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[\alpha]$ halmaz zárt a (szokásos) $+$, $-$ és $*$ műveletekre.
Milyen α esetén zárt $\mathbb{Z}[\alpha]$ az osztás műveletre? (10 pont)
- Egy kőbányában 50 db kőtömböt faragtak ki. A kövek sorba állíthatók úgy, hogy a sorban - a másodiktól kezdve - mindegyik kőnek a tömege 2 kg-mal több, mint az előtte állóé. Az első kő tömege 370 kg. Elszállítható-e az összes kőtömb 7 db 3 tonnás teherautóval, egyetlen fuvarban, túlterhelés nélkül? (10 pont)
- Hogyan rakhatta a matematikus-bűvész három dobozba a természetes számokat 1-től 100-ig tartalmazó számkártyákat (egyik doboz sem üres), ha mindig sikerül neki a következő trükk. A bűvész elfordul, egy néző kivesz két (különböző) dobozból egy-egy, tetszőleges számot, és a számok összegéből a bűvész meg tudja állapítani, hogy melyik két dobozból vettük ki a kártyákat. (10 pont)

Beadási határidő: 2021. március 16. (kedd) 24:00.

¹⁾ azaz érintőjük közös.

²⁾ **Útmutatás:** használja a parciális integrálás módszerét az $\int \frac{1}{x^2+9} dx$ integrálra.

A megoldásokat kérjük *elektronikusan* beküldeni a SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU címre: vagy gépelt formában (*pdf*), vagy a kézzel írt megoldást beszkenelve. Ügyeljünk a kézírás és a szkennelés (fénykép) olvasható jó minőségére és külalakjára, *valamint* az indoklás teljes, érthető megfogalmazására!

Olvashatatlan vagy nehezen olvasható, rendetlen külalakú, csak végeredményt közlő megoldásokat *nem* értékelünk.