Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2020/21
3. forduló

1. Határozza meg az

$$\int \sin(3x) \cdot \cos(4x) \ dx$$

primitív függvényt. (10 pont)

2. Adja meg az $f(x,y,z) := x^x + x^y + y^x + \sqrt[z]{\dfrac{z \cdot x}{z+y}}$ függvény összes változója szerinti parciális deriváltját. (10 pont)

3. **a)** Mutassa meg, hogy az $u(x) := ax + b$ és a $v(x) := x^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ polinomoknak *pontosan akkor* van közös gyökük, ha $\det(\mathbf{A}[u,v]) = 0$, ahol

$$\mathbf{A}[u,v] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 1 & c & d \end{bmatrix} .$$

b) Ismertesse egy mondatban a "*rezultáns*" lényegét és alkalmazásait. (8+2 pont)

4. Mutassa meg, hogy ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sajátértékei $\lambda_1, ..., \lambda_n$, akkor a $\mathbf{B} := \mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $1-\lambda_1, ..., 1-\lambda_n$, ahol $\mathbf{E}$ az egységmátrix. Mit mondhatunk $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátvektorairól? Adjuk meg a $\mathbf{B}$ mátrix "geometriai" jelentését is! (10 pont)

5. **a)** Legyen $A = \mathbb{N}$ a *nemnulla* természetes számok halmaza. Mutassuk meg, hogy az A halmazon értelmezett $x\Delta y :=$*lnko*(x,y) és $x\nabla y :=$*lkkt*(x,y) műveletek asszociatívok. Keressük meg az (A,Δ) és (A,∇) félcsoportokban az összes egység-, zérus-, nullosztó- és invertálható- elemeket, inverzeikkel együtt.

b) Ugyanaz, mint a), de most legyen $A = \mathbb{N}_0$, azaz $0 \in A$. (10 pont)

6. Tetszőleges nemnulla $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen

$\mathbb{Z}_n^* := \{x \in \mathbb{N} : x \leq n$ és *lnko* $(x,n) = 1\}$

és $x, y \in \mathbb{Z}_n^*$ esetén legyen $x \otimes y := xy$ *maradéka* n *-el elosztva.* Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{Z}_{100}^*, \otimes)$ csoport. (10 pont)

Beadási határidő: 2021. február 01. (hétfő) 24:00.

A megoldásokat kérjük *elektronikusan* beküldeni a SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU címre: vagy gépelt formában (*pdf*), vagy a kézzel írt megoldást beszkennelve. Ügyeljünk a kézírás és a szkennelés (fénykép) olvasható jó minőségére és külalakjára, *valamint* az indoklás teljes, érthető megfogalmazására!

Olvashatatlan vagy nehezen olvasható, rendetlen külalakú, csak végeredményt közlő megoldásokat <u>*nem*</u> értékelünk.