Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2020/21
2. forduló

1. Bizonyítsa be a $2x \cdot \arctan(x) \geq \ln\left(1+x^2\right)$ egyenlőtlenséget (bármely $x \in \mathbb{R}$ számra)!
(10 pont)

2. Számítsa ki a következő határértéket (ha létezik):

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}}{\sqrt[3]{x}+1}$$

(10 pont)

3. Mutassa meg, hogy az $\left\{\underline{a_1}, \underline{a_2}\right\}$ vektorok által kifeszített altér megegyezik az $\left\{\underline{a_3}, \underline{a_4}\right\}$ vektorok által kifeszített altérrel, ahol $\underline{a_1} = [1,1,1,1,1]^T$, $\underline{a_2} = [0,1,2,3,4]^T$, $\underline{a_3} = [-3,-2,-1,0,1]^T$, $\underline{a_1} = [4,3,2,1,0]^T$. (10 pont)

4. Az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixot *idempotens*nek nevezzük, ha $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ teljesül.

a) Mutassa meg, hogy az alábbi mátrix idempontens:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Igazolja, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ is idempotens!
(10 pont)

5. Tekintsük a következő permutációt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 10 & 9 & 7 & 6 & 8 & 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

és a segítségével definiáljuk az $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ halmazon a ρ relációt a következőképpen: legyen

$n \rho m$ ha van olyan $k \in \mathbb{N}$ amelyre $n\sigma^k = m$ (azaz $\sigma^k(n) = m$).

Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció, és adja meg ρ ekvivalenciaosztályait! (10 pont)

6. Hány részsorozata van egy tetszőleges $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ végtelen számsorozatnak? (10 pont)

Beadási határidő: 2020. december 7. (hétfő) 24:00.

A megoldásokat kérjük *elektronikusan* beküldeni a SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU címre: vagy gépelt formában (*pdf*), vagy a kézzel írt megoldást beszkennelve. Ügyeljünk a kézírás és a szkennelés (fénykép) olvasható jó minőségére és külalakjára, *valamint* az indoklás teljes, érthető megfogalmazására!

Olvashatatlan vagy nehezen olvasható, rendetlen külalakú, csak végeredményt közlő megoldásokat *nem* értékelünk.

A most kitűzött, valamint az elmúlt tanév versenyfeladatainak megoldásait **2020. december 15. (kedd) 18:00** órakor megbeszéljük a Matematika Tanszék Könyvtárában (I. épület 314. szoba).