



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2020/21
1. forduló

1. Mutassuk meg, hogy a $h_n = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat kielégíti a

$$h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-2} \quad (2 \leq n)$$

(rekurzív) összefüggést és a $h_0 = 0$, $h_1 = 1$ "Kezdeti Érték Feltételt". (10 pont)

2. Vizsgálja meg, hogy a $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ függvénynek van-e inverze az értelmezési tartomány valamely (legbővebb) részén, adja meg az inverz függvényt (értelmezési tartományával együtt), majd ábrázolja a függvényt és annak inverzét közös koordinátarendszerben. (10 pont)

3. Tekintsük az alábbi három síkot:

$$S_1 : 5x + 2y + z = -2, \quad S_2 : -3x + 4y + 7z = 32, \quad S_3 : 35x - 133y + 91z = -287.$$

a) Mutassuk meg, hogy a síkok páronként merőlegesek egymásra és egyetlen közös pontra illeszkednek.

b) Az $E(30, 45, 52)$ lyukon átszűrődő, $\mathbf{v}(-2, -3, -4)$ irányú f fénysugár melyik síkot metszi legelőször?

c) Határozzuk meg erről a síkról visszaverődő f' fénysugár egyenletét¹⁾!

d) A fentiekhez hasonló számításokkal kimutatható, hogy (bármely E és f esetén) a három tükrőről visszaverődő f''' fénysugár *párhuzamos* f -el és E -hez "közel" halad el. Milyen gyakorlati felhasználása van ennek a tételnek? (5+6+7+2 pont)

4. Ha $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{1} = \{\emptyset\}$, $\mathbf{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathbf{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, akkor mi lehet $\mathbf{5} = ?$ Mi a logikája, lehető legegyszerűbben megfogalmazva, és "felhasználása" ennek a sorozatnak? (10 pont)

5. Tetszőleges A, B halmazok esetén legyen $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ az A és B halmazok **szimmetrikus differenciája**. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

(10 pont)

¹⁾ **Segítség:** $\pm \frac{\mathbf{v}_f}{|\mathbf{v}_f|} \pm \frac{\mathbf{v}_{f'}}{|\mathbf{v}_{f'}|} = 2 \cdot \frac{\mathbf{n}_S}{|\mathbf{n}_S|}$.

Beadási határidő: 2020. október 19. (hétfő) 24:00.

A megoldásokat kérjük *elektronikusan* beküldeni a SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU címre: vagy gépelt formában (*pdf*), vagy a kézzel írt megoldást beszkennelve. Ügyeljünk a kézírás és a szkennelés (fénykép) olvasható jó minőségére és külalakjára, *valamint* az indoklás teljes, érthető megfogalmazására!

Olvashatatlan vagy nehezen olvasható, rendetlen külalakú, csak végeredményt közlő megoldásokat *nem* értékelünk.

A most kitűzött, valamint az elmúlt tanév versenyfeladatainak megoldásait **2020. október 27. (kedd) 18:00** órakor megbeszéljük a Matematika Tanszék Könyvtárában (I. épület 314. szoba).