Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2019/20
6. forduló

1. Adjon meg egy olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f(0,1) = 2$, továbbá minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 1 \ .$$
(10 pont)

2. Számítsa ki a következő integrált:
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \right) dy \ .$$
(10 pont)

3. Mely irányokra nézve differenciálható a $(2, 0)$ pontban a következő függvény:
$$f(x,y) = \sqrt[3]{(x-2)^2 - 4y^2} \ ?$$
(10 pont)

4. Mutassuk meg, hogy $n^5 - n$ minden $n \in \mathbb{Z}$ egész szám esetén osztható 30 -cal! (10 pont)

5. Legyenek $b, c \in \mathbb{Z}$ tetszőleges egész számok, legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ egyenlet egyik gyöke, és legyen $\mathbb{Z}[\alpha] := \{x + y\alpha : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[\alpha]$ halmaz zárt a (szokásos) + , - és * műveletekre. Milyen α esetén zárt $\mathbb{Z}[\alpha]$ az osztás műveletre?
(10 pont)

6. A kerékpár *hajtó* és *hajtott* fogaskerekeinek egy-egy fogát megjelöltük. Milyen számelméleti műveletet tudunk így kísérletileg elvégezni? Hogyan lehet így meghatározni az *lnko* -t ?

(10 pont)

Beadási határidő: 2020. június 28. (vasárnap) 24:00.

A megoldásokat kérjük elektronikusan beküldeni a SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU címre: gépelt formában vagy a kézzel írt megoldást beszkennelve. Ügyeljünk a kézírás és a szkennelés (fénykép) olvasható jó minőségére és külalakjára! Olvashatatlan vagy nehezen olvasható, rendetlen külalakú megoldásokat *nem* értékelünk.