



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2019/20
3. forduló

1. Számítsa ki az alábbi határértéket: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$. (5 pont)

2. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye, amelyre $\lim_{\pm\infty} \varphi$ határértékek végesek. Igazolja, hogy az f -nek létezik fixpontja, azaz van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre $f(x_0) = x_0$. (15 pont)

3. Legyen A a következő $n \times n$ -es mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{bmatrix}$$

ahol c_0, \dots, c_{n-1} tetszőleges valós számok.

a) Mutassa meg, hogy $\{e_1, Ae_1, A^2e_1, \dots, A^{n-1}e_1\}$ egy bázisa \mathbb{R}^n -nek, ahol $e_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$.

b) Adja meg a fenti mátrix karakterisztikus polinomját. (5+15 pont)

4. Legyen P az emberek halmazán, a következő predikátum:

$$P(x, y) \iff x \text{ fél } y \text{-től.}$$

Formalizálja a következő állításokat:

a) Van olyan ember, aki mindenkitől fél.

b) Chuck Norris senkitől sem fél.

c) Mindenki fél valakitől.

d) Van olyan ember, akitől ha András fél, akkor mindenki más is fél tőle. (10 pont)

5. Keressen olyan z komplex számokat, amelyekre $e^z = -2$. (10 pont)

Beadási határidő: 2020. január 20. (hétfő) 12:00

Kizárólag kézzel vagy géppel (papírra) írt megoldásokat fogadunk el, elektronikusan beküldött megoldásokat nem veszünk figyelembe!

A feladatok megoldásait 2020. február elején, később pontosítandó időpontban megbeszéljük a Matematika Tanszék Könyvtárában (I. ép. 314.).