Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2018/19
3. forduló

1. Legyen $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ konvex, és legyen $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$. Igazoljuk az alábbi kettő esetben (külön-külön), hogy a g függvény szintén konvex:

   a) az f kétszer differenciálható,

   b) az f differenciálható (*a Lagrange-féle középértéktétel is kell a bizonyításhoz*).

(4+6 pont)

2. Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}\,dx$ integrált a $t^3 = \dfrac{x+1}{x-1}$ helyettesítéssel.

(10 pont)

3. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok és legyenek $\mathbf{u}_k := \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i$ $(k = 1, ..., m)$.

   a) Igaz-e, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ vektorok megoldásai az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek, akkor az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$ vektorok is megoldásai ugyanennek az egyenletrendszernek? (Válaszát indokolja!)

   b) Igaz-e, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ vektorok mindegyike λ sajátértékű sajátvektora az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációnak, akkor ugyanez igaz az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$ vektorokra is? (Válaszát indokolja!)

(5+5 pont)

4. a) Igaz-e, hogy két felső háromszög mátrix szorzata is felső háromszög mátrix? Igaz-e ugyanez alsó háromszög- illetve diagonális mátrixokra?

   b) Igaz-e hogy a mátrixszorzás a felső háromszög mátrixok körében kommutatív? Igaz-e ugyanez alsó háromszög- illetve diagonális mátrixokra?

   c) Mutassa meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ mátrixokra $AB = BA$ pontosan akkor teljesül, ha $\det \begin{bmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{bmatrix} = 0$.

(10 pont)

5. Keressük meg az $x^6 + 64$ polinom *összes* gyökét!

   Bontsuk fel a polinomot **a)** komplex **b)** valós együtthatós polinomok szorzatára. (10 pont)

6. Tekintsük a valós számokon az $x \diamond y := x + y + xy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ kétváltozós műveletet.

   a) Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, \diamond)$ kommutatív félcsoport.
   b) Keressük meg ebben a félcsoportban az egységelemet, zéruselemet, nullosztókat, az invertálható elemeket és inverzeiket.
   c) Igaz-e, hogy az $(\mathbb{R}\backslash\{-1\}, \diamond)$ struktúra Abel-csoport?

   (10 pont)

Beadási határidő: 2019. január 31. (csütörtök), 12:00

A feladatok megoldásait 2019. februárjában beszéljük meg a Matematika Tanszék könyvtárában (I. ép. 314.)

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!