Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2016/17
2. forduló

1. Bizonyítsa be, hogy
$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\ .$$
(10 pont)

2. Létezik-e olyan függvény, amely egy pontban differenciálható, de semmilyen más pontban nem is folytonos? (10 pont)

3. Jó néhány évvel ezelőtt egy csoport számításokon dolgozott a statisztikai hivatalban. Három heti kemény munka (kézi számítások) után meghatározták egy 20×20 -as A mátrix inverzét. Akkor jött a főnök, és azt mondta: „*Bocs, engem igazán az A transzponáltjának az inverze érdekelne.*” Némi pánik után rájöttek, hogy nem kell újra készíteni az összes számítást.

   a) Melyik tanult számolási szabályt kellett használniuk a csoport tagjainak, hogy ne vesszen kárba a három hét kemény munkája? Igazolja is ezt az állítást!

   b) Mutassa meg, hogy ha egy A mátrix invertálható és szimmetrikus, akkor az inverze is szimmetrikus! (10 pont)

4. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert:
$$\left.\begin{aligned} px_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$
ahol p valós paraméter. Vizsgálja meg, hogy p mely értékeire oldható meg az egyenletrendszer, és adja is meg a megoldásvektor(oka)t a p paraméter függvényében! (10 pont)

5. Jelölje $\mathcal{K}$ azon konvergens számsorozatok halmazát, amelyeknek véges sok eleme 0 , és tekintsük $\mathcal{K}$ -n a következő relációt: legyen $(a_n) \leftrightsquigarrow (b_n)$ pontosan akkor, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. Mutassa meg, hogy $\leftrightsquigarrow$ ekvivalencia reláció $\mathcal{K}$ -n, és adja meg $\leftrightsquigarrow$ ekvivalencia osztályait.
(10 pont)

6. Adja meg és ábrázolja azon komplex számok halmazát, amelyekre $|z|^2 = 3\,(z+i)\,\overline{(z+i)}$.
(10 pont)

Beadási határidő: **2016. december 02. (péntek) 13:00 óra**
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!