Matematikai feladatmegoldó verseny 2014/15.
2. forduló - megoldások

1. Mivel
$$(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+2^x\right)\right),$$
elég vizsgálni a
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}$$
határértéket. A L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\cdot\ln 2}{x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot(\ln 2)^2}{1+2^x\cdot\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)^2}{\frac{1}{2^x}+\ln 2}=\ln 2.$$
Tehát
$$\lim_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\ln 2\right)=2.$$

2. Legyen
$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\qquad x\in(0,\pi)\,.$$
Bizonyítandó, hogy f szigorúan monoton csökkenő a $(0,\pi)$-n. Minden $x\in(0,\pi)$ esetén
$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$
Ha
$$g(x)=x\cos x-\sin x,$$
akkor
$$g'(x)=-x\sin x<0,\qquad\qquad x\in(0,\pi)\,,$$
tehát
$$g(x)<g(0)=0,\qquad \text{ha}\quad x\in(0,\pi)\,,$$
és ezért
$$f'(x)<0,\qquad \text{ha}\quad x\in(0,\pi)\,,$$
amiből következik az állítás.

3. a) Tegyük fel, hogy az A,B $n\times n$ -es mátrixokra
$$A\cdot B=A\quad\text{ és }\quad B\cdot A=B.$$
Ekkor:
$$A=A\cdot B=A\cdot(B\cdot A)=(A\cdot B)\cdot A=A\cdot A=A^2,$$
$$B=B\cdot A=B\cdot(A\cdot B)=(B\cdot A)\cdot B=B\cdot B=B^2,$$
tehát A és B idempotens.

b) Számolással ellenőrizhető, hogy a megadott A és B mátrixokra $A\cdot A=A$ és $B\cdot B=B$ teljesül, azaz a mátrixok idempotensek. Továbbá:
$$A\cdot B=B\cdot A=O_{n\times n},$$
ami mutatja, hogy az a)-beli állítás nem megfordítható. A kapott eredmény alapján A és B zérusosztók.

4. a) Legyen $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ az inhomogén egyenletrendszer két különböző megoldásvektora. Ekkor:

$$A \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = A \cdot \underline{x}_1 - A \cdot \underline{x}_2 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{o},$$

azaz $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$ megoldásvektora a homogén egyenletrendszernek.

b) Legyen $\underline{x}_0$ a homogén, $\underline{x}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldásvektora. Ekkor:

$$A\,(\underline{x}_0 + \underline{x}) = A \cdot \underline{x}_0 + A \cdot \underline{x} = \underline{o} + \underline{b} = \underline{b},$$

tehát $\underline{x}_0 + \underline{x}$ megoldásvektora az inhomogén egyenletrendszernek.

c) Jelölje M_o a homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát. Legyen

$$\underline{x}_1,\ \underline{x}_2 \in M_o, \quad \lambda \in R.$$

Ekkor

$$A \cdot (\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = \underline{o} + \underline{o} = \underline{o},$$
$$A \cdot (\lambda \cdot \underline{x}_1) = \lambda \cdot (A\underline{x}_1) = \lambda \cdot \underline{o} = \underline{o},$$

így

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in M_o \ \text{ és } \ \lambda\underline{x}_1 \in M_o$$

is teljesül. M_o zárt a vektor alapműveletekre, tehát altér.

5. A $|z|^2 = z\overline{z}$ azonosságot használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\
&= 2(|z|^2 + |w|^2).
\end{aligned}$$

6. Legyen $B_\rho = (b_{ij}^\rho)$ és $B_\sigma = (b_{ij}^\sigma)$.

a) Mivel $(a_i, a_j) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha $(a_j, a_i) \in \rho^{-1}$, ezért ρ^{-1} illeszkedési mátrixa B_ρ^T.

b) Mivel $(a_i, a_j) \in \rho \cap \sigma$ akkor és csak akkor, ha $(a_i, a_j) \in \rho$ és $(a_i, a_j) \in \sigma$, ezért $B_{\rho\cap\sigma} = (b_{ij})$, ahol

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } b_{ij}^\rho = b_{ij}^\sigma = 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

c) Mivel $(a_i, a_j) \in \rho \cup \sigma$ akkor és csak akkor, ha $(a_i, a_j) \in \rho$ vagy $(a_i, a_j) \in \sigma$, ezért $B_{\rho\cup\sigma} = (b_{ij})$, ahol

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } b_{ij}^\rho = b_{ij}^\sigma = 0, \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

d) $(a_i, a_j) \in \rho\sigma$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$(a_i, a_k) \in \rho \qquad \text{és} \qquad (a_k, a_j) \in \sigma. \tag{1}$$

Másrészt ha $B_\rho B_\sigma = (c_{ij})$, akkor $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^\rho b_{kj}^\sigma = 0$ akkor és csak akkor, ha nincs olyan k, amelyre (1) teljesül. Ezért a $B_{\rho\sigma}$ mátrixot úgy kapjuk a $B_\rho B_\sigma$ mátrixból, hogy az összes nem nulla elemet 1-re cseréljük.