Matematikai feladatmegoldó verseny 2013/14.
2. forduló - megoldások

1. Mivel
$$\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x} = \exp\left(\operatorname{ctg} x \ln\frac{1+e^x}{2}\right),$$
elég kiszámítani a
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \ln\frac{1+e^x}{2} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\ln\frac{1+e^x}{2}}{\sin x}$$
határértéket. Nyilván
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$
és a L'Hospital-szabály szerint
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+e^x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$
Ezért
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \ln\frac{1+e^x}{2} = \frac{1}{2},$$
és így
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{e}.$$

2. Egy négyzet alapú hasáb felszíne
$$F = 2a^2 + 4am,$$
ahol m a magasság, a pedig a négyzet (alap) oldala. A hasáb térfogata $V = a^2 m$.
Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggéseket a következő 6 számra:
$$a^2,\ a^2,\ am,\ am,\ am,\ am.$$
Azt kapjuk, hogy
$$V^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{a^8 m^4} \le \frac{2a^2+4am}{6} = \frac{F}{6},$$
avagy
$$V \le \left(\frac{F}{6}\right)^{\frac{3}{2}},$$
és az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a számok megegyeznek, azaz $a^2 = am$. Ez akkor teljesül, ha $a = m$. Tehát az adott felszínű hasábok közül a kocka térfogata a legnagyobb.

3. (a) Legyen $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2 \in M_o$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor
$$A\cdot(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\cdot\underline{x}_1 + A\cdot\underline{x}_2 = \underline{o} + \underline{o} = \underline{o},$$
így $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in M_o$,
$$A\cdot(\lambda\cdot\underline{x}_1) = \lambda\cdot(A\cdot\underline{x}_1) = \lambda\cdot\underline{o} = \underline{o},$$
így $\lambda\cdot\underline{x}_1 \in M_o$.
Tehát M_o zárt a vektor alapműveletekre, így altér.

(b) Ha $r\,(A) = k$, akkor az ismeretlenek között k db kötött és $n-k$ db szabad ismeretlen található. A megoldóképlet jelöléseit alkalmazva:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \cdot \underline{x}_R \\ E \cdot \underline{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ E \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_R, \qquad (*)$$

ahol, E az $(n-k) \times (n-k)$ méretű egységmátrix.

A $\begin{bmatrix} -D \\ E \end{bmatrix}_{n\times(n-k)}$ mátrix oszlopvektorai az egységmátrix blokk miatt lineárisan függetlenek, így a $(*)$ egyenlet szerint a homogén egyenletrendszer megoldásvektorai $n-k$ darab lineárisan független vektor lineáris kombinációiként állanak elő, így $n-k$ dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben.

4. (a) $P\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda E) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot\left(\lambda^2 - 0\right) = 0$

Így a saját értékek:

$\lambda_1 = 0$, algebrai multiplicitása 3,

$\lambda_2 = 1$, algebrai multiplicitása 1.

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó saját altér az $(A - \lambda_1 \cdot E)\cdot\underline{x} = \underline{o}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza:

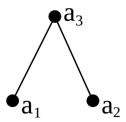
$$H\,(0) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \in \mathbb{R}\,, \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0 \right\},$$

míg a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(A - \lambda_2 \cdot E)\cdot\underline{x} = \underline{o}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza:

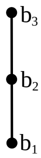
$$H\,(1) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \in \mathbb{R}\,, \quad x_1 = -x_4, \quad x_2 = -2x_4, \quad x_3 = 0 \right\}.$$

(b) Mivel mindkét sajátaltér 1 dimenziós, így az A lineáris transzformáció sajátvektorai közül maximálisan két darab lineárisan független vektort lehet kiválasztani. Így nincs olyan bázis $\mathbb{R}^4$-ben, amelyet az A transzformáció sajátvektorai alkotnak.

5. Legyen $A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ és $A_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$, és definiáljuk a $\leq_1$ ill. $\leq_2$ parciális rendezéseket az A_1 ill. A_2 halmazokon az



illetve



Hesse-diagrammokkal.

Definiáljuk a $\varphi:\ A_1 \to A_2$, $\varphi(a_i) = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$ leképezét. Ekkor nyilván φ bijekció A_1 és A_2 között, és könnyen ellenőrizhető, hogy φ monoton. Viszont φ^{-1} nem monoton, mivel $b_1 \leq_2 b_2$, de $a_1 \not\leq_1 a_2$.

6. Legyen $A = [0,1] \times [0,1]$. Megmutatjuk, hogy $|[0,1]| \leq |A|$ és $|A| \leq |[0,1]|$, amiből következik, hogy $|A| = |[0,1]|$, azaz A kontinuum számosságú.

Legyen $\varphi:\ [0,1] \to A$, $\varphi(x) = (x, 0)$. Ekkor nyilvánvalóan φ injektív, ezért $|[0,1]| \leq |A|$.

Fordítva, legyen $x, y \in [0,1]$, és tekintsük az x és y végtelen tizedes tört alakját: $x = 0,x_1x_2x_3\ldots$ és $y = 0,y_1y_2y_3\ldots$. (Például $0,5 = 0,4999\ldots$.) Ekkor az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ és $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sorozatok egyértelműen definiáltak. Tekintsük a következő leképezést: $\psi:\ A \to [0,1]$, $(x,y) \mapsto z$, ahol z a következő végtelen tizedestörttel definiált valós szám: $z = 0,x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ψ is injektív, azaz $|A| \leq |[0,1]|$.