Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
3. forduló - megoldások

1. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{n-1}dx &= -\frac{1}{3}\int_0^1 x\left(-3x^2\right)\left(1-x^3\right)^{n-1}dx\\ &= -\frac{1}{3}\left[x\frac{\left(1-x^3\right)^n}{n}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(1-x^3\right)^n}{n}dx\\ &= \frac{1}{3n}I_n.\end{aligned}$$

(b) Nyilvánvaló, hogy $I_0 = 1$. $n \geq 1$ esetén

$$I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{n-1}dx-\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{n-1}dx,$$

így az (a) rész alapján

$$I_n = I_{n-1}-\frac{1}{3n}I_n.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$I_n=\frac{3n}{3n+1}I_{n-1}=\frac{3n}{3n+1}\frac{3(n-1)}{3n-2}\cdots\frac{3}{4},\quad n\geq 1.$$

2. (a) Legyen

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} a_n,\quad k\geq 1,\quad \text{és}\quad T_l := \sum_{n=1}^{l}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right),\quad l\geq 1.$$

Ekkor

$$T_l = S_{2l+1}-a_1,\quad l\geq 1, \tag{1}$$

valamint

$$S_{2k}=T_k-a_{2k+1}+a_1\quad \text{és}\quad S_{2k+1}=T_k+a_1,\quad k\geq 1, \tag{2}$$

így alkalmazhatjuk egy sorozat határértéke és részsorozatai határértékeinek kapcsolatáról tanultakat.

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor az (1) alapján a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)$ sor is konvergens.

Fordítva, ha a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)$ sor is konvergens, akkor a (2) és a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

(b) Mivel

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\,(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad n \geq 1.$$

Láthatjuk, hogy a sor konvergens és az összege 1.

3. Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektív lineáris transzformáció, és tegyük fel, hogy a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor λ sajátértékű sajátvektora A-nak. Ekkor biztos, hogy $\lambda \neq 0$, hiszen $\lambda = 0$ esetén az A magtere nem csak a nullvektort tartalmazná, ez pedig ellentmond az A transzformáció injektív voltának.
Felhasználva az $A^{-1} \circ A = id_{\mathbb{R}^n}$ egyenlőséget,

$$\left(A^{-1} \circ A\right)(\underline{v}) = A^{-1}\left(A\left(\underline{v}\right)\right) = A^{-1}\left(\lambda \underline{v}\right) = \underline{v}.$$

Injektív lineáris transzformáció inverze is lineáris, így

$$A^{-1}\left(\lambda \underline{v}\right) = \lambda \cdot A^{-1}\left(\underline{v}\right) = \underline{v}.$$

Innen $\lambda \neq 0$-val osztva: $A^{-1}\left(\underline{v}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \underline{v}$.
Tehát a $\underline{v}$ vektor az A^{-1} lineáris transzformáció $\frac{1}{\lambda}$ sajátértékű sajátvektora.

4. (a) Legyen q_1 és $q_2 \in V$. Ekkor q_1 és q_2 felírható a p_1, p_2 és p_3 polinomok lineáris kombinációjaként:

$$q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3, \qquad \text{illetve} \qquad q_2 = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3.$$

Ekkor

$$q_1 + q_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot p_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot p_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \cdot p_3,$$

azaz $q_1 + q_2$ is előáll a p_1, p_2 és p_3 lineáris kombinákciójaként. Így V zárt a vektorösszeadásra.
Legyen $q \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor q felírható a p_1, p_2 és p_3 polinomok lineáris kombinációjaként:

$$q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$$

Ekkor

$$\lambda \cdot q = (\lambda \alpha_1)\, p_1 + (\lambda \alpha_2)\, p_2 + (\lambda \alpha_3)\, p_3,$$

azaz a λq polinom is előáll p_1, p_2 és p_3 lineáris kombinációjaként. Így V zárt a skalárral való szorzásra is, tehát V altér a legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében.

(b) A $P^3_{\mathbb{R}}$ vektortér véges dimenziójú, így a $\{p_1, p_2,\ p_3\}$ polinomhalmaz rangjának meghatározására alkalmazható a bázistranszformáció.
Legyen $q_i\,(x) = x^i$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $\quad i = 0, 1, 2, 3$.
Az induló táblázat:

	p_1	p_2	p_3
q_0	5	0	0
q_1	0	2	0
q_2	2	1	1
q_3	1	0	1

A szokásos bázistranszformációs algoritmussal számolva megállapítható, hogy p_1, p_2 és p_3 is bevonható a bázisba, és például q_0, p_1, p_2 és p_3 bázist alkot $P^3_{\mathbb{R}}$-ban. Így $dim\,(V) = 3$, és p_1, p_2 és p_3 a V altérben bázist alkot.

(c) Mivel q_0, p_1, p_2 és p_3 bázist alkot $P^3_{\mathbb{R}}$-ban, így legyen

$$V' = \{\lambda \cdot q_0 \,|\lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor V és V' bázisainak uniója bázis $P^3_{\mathbb{R}}$-ban, ezért $P^3_{\mathbb{R}} = V \oplus V'$.

5. A determináns 2. és 3. oszlopát hozzadva az első oszlophoz kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z & z^2 & 1 \\ z^2 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+z+z^2 & z & z^2 \\ 1+z+z^2 & z^2 & 1 \\ 1+z+z^2 & 1 & z \end{vmatrix}$$

amiből kapjuk az állítást, hiszen $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = 0$, és így $z^2 + z + 1 = 0$, mivel $z \neq 1$.

6. Tetszőleges 4 pontot kiválasztva a körvonalon elhelyezkedő pontok közül látható, hogy csak a két átellenes pontot összekötő egyenes fogja egymást metszeni a körvonal belsejében. Azaz bármely 4 pont meghatároz 2 olyan egyenest, amelynek a metszéspontja a kör belsejébe esik. Másrészt a feltételekből következik, hogy külöböző 4 pont esetén ez a metszéspont is különböző. Ebből következik, hogy pontosan annyi metszéspont lesz a kör belsejében, ahányféleképpen 4 pontot kiválasztunk a 9-ből. Ennek száma

$$\binom{9}{4} = 126.$$