Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
2. forduló - megoldások

1. Mivel az f folytonos a $[-1,1]$ korlátos és zárt intervallumon, Weierstrass tétele szerint az f-nek létezik maximuma a $[-1,1]$-en: van olyan $x_0 \in [-1,1]$, amelyre $f(x) \leq f(x_0)$ bármely $x \in [-1,1]$ esetén. $\lim\limits_{x\to-\infty} f = \lim\limits_{x\to\infty} f = -\infty$ alapján van olyan $c \leq -1$ és $d \geq 1$, hogy
$$f(x) \leq f(x_0), \quad x \leq c \quad \text{és} \quad f(x) \leq f(x_0), \quad x \geq d. \tag{1}$$
Az f folytonos a $[c,d]$ korlátos és zárt intervallumon, így Weierstrass tétele mutatja, hogy az f-nek létezik maximuma a $[c,d]$-n: van olyan $x_1 \in [c,d]$, amelyre $f(x) \leq f(x_1)$ bármely $x \in [c,d]$ esetén. Ebből $f(x_0) \leq f(x_1)$, és az (1) alapján következik, hogy az f-nek az x_1-nél maximuma van.

2. a) Mivel az f folytonos az $[a,b]$-n, Bolzano tétele alapján van olyan $x \in \,]a,b[$, hogy $f(x) = c$. Legyen
$$C := \{x \in \,]a,b[\mid f(x) = c\},$$
és legyen $x_c := \sup(C)$. Ekkor $x_c \leq b$.
Az f folytonos a b-nél, és $c > f(b)$, így van olyan $r > 0$, hogy $x \in \,]b-r,b[$ esetén $f(x) < c$, tehát $x_c < b$.
Tfh. $f(x_c) > c$. Ekkor szintén Bolzano tétele alapján van olyan $x \in \,]x_c,b[$, amelyre $f(x) = c$, így találtunk a C-ben az x_c-nél nagyobb elemet, ez pedig nem lehetséges.
Tfh. $f(x_c) < c$. Ekkor az f x_c-nél való folytonossága szerint van olyan $r > 0$, hogy $x \in \,]x_c - r, x_c[$ esetén $f(x) < c$, ami azt mutatja, hogy pl. az $x_c - r < x_c$ is felső korlátja a C-nek, és ez lehetetlen.
Összefoglalva: láthatjuk, hogy az x_c megfelelő.

   b) Legyen $c \in \,]f(b), f(a)[$, és válasszuk az (a)-beli x_c számot. Mivel $f(x_c) = c$, valamint $x_c < x \leq b$ esetén $f(x) < c$, ezért $x_c < x \leq b$ esetén
$$\frac{f(x) - f(x_c)}{x - x_c} = \frac{f(x) - c}{x - x_c} < 0,$$
tehát
$$f'_+(x_c) = \lim_{x\to x_c+} \frac{f(x) - f(x_c)}{x - x_c} \leq 0.$$

3. a) Számolással ellenőrizhető, hogy
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Így A $p = 2$-es indexű nilpotens mátrix.

   b)
$$C \cdot C^{-1} = (A+E) \cdot \left(E - A + A^2\right) = A - A^2 + A^3 + E - A + A^2 = A^3 + E = O + E = E$$
Hasonlóan, $C^{-1} \cdot C = E$ is teljesül. Tehát a $C = A + E$ mátrix invertálható, és $C^{-1} = E - A + A^2$.

   c) Ha az A $n \times n$-es mátrix p indexű nilpotens mátrix, akkor a $C = A + E$ mátrix invertálható, és $C^{-1} = E - A + \cdots + (-1)^P \cdot A^P$.
Biz.:
$$C \cdot C^{-1} = (A+E)\left(E - A + \cdots + (-1)^P \cdot A^P\right) = A^{P+1} + E = O + E = E$$
Hasonlóan, $C^{-1} \cdot C = E$ is teljesül. Így a $C = A + E$ mátrix invertálható, és $C^{-1} = E - A + \cdots + (-1)^P \cdot A^P$.

4. a) Az egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk az együtthatómátrix rangját bázistranszformációval!

$$\begin{array}{cccc} & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 \\ \underline{e}_1 & 1 & m & m^2 \\ \underline{e}_2 & m & m^2 & 1 \\ \underline{e}_3 & m^2 & 1 & m \end{array}$$

Az $\underline{a}_1 \to \underline{e}_1$ vektorcsere végrehajtása után az alábbi táblázatot nyerjük:

$$\begin{array}{ccc} & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 \\ \underline{a}_1 & m & m^2 \\ \underline{e}_2 & 0 & 1-m^2 \\ \underline{e}_3 & 1-m^3 & m-m^4 \end{array}$$

Ebből a táblázatból láthatjuk, hogy $m = 1$ esetén több vektor nem vonható be a bázisba, tehát ekkor $r(A) = 1$.
Ha $m \neq 1$, akkor végrehajtható az $\underline{a}_3 \to \underline{e}_2$, majd az $\underline{a}_2 \to \underline{e}_3$ vektorcsere, így ebben az esetben $r(A) = 3$.
Tehát:

$$r(A) = 1, \quad \text{ha} \quad m = 1$$

$$r(A) = 3, \quad \text{ha} \quad m \neq 1.$$

b) <u>$m = 1$ esetén</u> bázistranszformációval megoldva az egyenletrendszert az alábbi táblázatot kapjuk:

$$\begin{array}{cccc} & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{o} \\ \underline{a}_1 & 1 & 1 & 0 \\ \underline{e}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{e}_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A megoldó képletbe helyettesítve:

$$x_1 = 0 - [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_2 - x_3$$

$$M = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 = -x_2 - x_3 \right\}.$$

<u>$m \neq 1$ esetén</u> $r(A) = 3$, így ekkor a homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása van: $M = \{(0, 0, 0)\}$.
(c) A felírt megoldáshalmazokból látható, hogy az egyenletrendszer valamennyi nem triviális megoldásvektora ($m = 1$ esetén) olyan, hogy ha $x_2, x_3 > 0$, akkor $x_1 < 0$. Így nincs olyan megoldásvektor, amelynek mindhárom komponense pozitív.

5. Először írjuk fel a $G = C \to (A \wedge B)$ és $H = (\neg(A \vee B)) \to C$ formulák igazságtábláját. Ezután ismerve C, G és H logikai értékét, a $C \to F \equiv G$ és $F \to C \equiv H$ feltételekből F logikai értékére tudunk következtetni, és azt kapjuk, hogy minden esetben F-nek jól definiált logikai értéket adva teljesül mindkét feltétel:

A	B	C	$A \wedge B$	G	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	H	F
i	i	i	i	i	i	h	i	i
i	i	h	i	i	i	h	i	h
i	h	i	h	h	i	h	i	h
i	h	h	h	i	i	h	i	h
h	i	i	h	h	i	h	i	h
h	i	h	h	i	i	h	i	h
h	h	i	h	h	h	i	i	h
h	h	h	h	i	h	i	h	i

Az utolsó oszlop logikai értékeit figyelembe véve kapjuk, hogy az $F = (A \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))$ formula teljesíti mindkét feltételt.

6. Legyen A és B kontinuum számosságú halmazok. Mivel a $[0,1]$ és $[2,3]$ intervallumok számossága kontinuum, ezért léteznek $f : A \to [0,1]$ és $g : B \to [2,3]$ bijekciók. Definiáljuk a

$$\phi : A \cup B \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A, \\ g(x), & \text{ha } x \in B \setminus A \end{cases}$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy ϕ injektív. Tegyük fel, hogy $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Két eset van: (1) ha $\phi(x_1) \in [0,1]$, akkor $x_1, x_2 \in A$, és így $f(x_1) = \phi(x_1) = \phi(x_2) = f(x_2)$, és ezért f bijektivitásából következik $x_1 = x_2$. (2) Ha pedig $\phi(x_1) \in [2,3]$, akkor $g(x_1) = \phi(x_1) = \phi(x_2) = g(x_2)$, és g bijektivitásából következik $x_1 = x_2$. Tehát a $\phi : A \cup B \to \mathbb{R}$ leképezés injektív. De ekkor használva az $A \subseteq A \cup B$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$|A| \leq |A \cup B| \leq |\mathbb{R}|.$$

Mivel A és $\mathbb{R}$ is kontinuum számosságú, ezért $|A| = |A \cup B| = |\mathbb{R}|$, azaz $A \cup B$ számossága is kontinuum.