Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
3. forduló

1. Legyen $I_n := \int\limits_0^1 \left(1-x^3\right)^n dx$, ahol $n \geq 0$ egész.

   (a) Igazolja, hogy $n \geq 1$ esetén $\int\limits_0^1 x^3 \left(1-x^3\right)^{n-1} dx = \dfrac{1}{3n} I_n$. (5 pont)

   (b) Rekurziós formulát felírva Számítsa ki az I_n-et. (5 pont)

2. (a) Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy valós számsorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Igazolja, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ sor konvergens. (5 pont)

   (b) Igazolja, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, és számítsa ki az összegét. (5 pont)

3. Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektív lineáris transzformáció, amelynek λ sajátértékű sajátvektora a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor.
   Mutassa meg, hogy ekkor a $\underline{v}$ vektor sajátvektora az A^{-1} invezr transzformációnak is!
   Adja meg a hozzá tartozó sajátértéket! (10 pont)

4. Tekintsük az alábbi polinomokat:

$$\begin{array}{rclclcll} p_1(x) & = & x^3 & + & 2x^2 & + & 5, & x \in \mathbb{R} \\ p_2(x) & = & x^2 & + & 2x & & & x \in \mathbb{R} \\ p_3(x) & = & x^3 & + & x & & & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

   továbbá a
$$V := \{\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 \,|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$
   polinomhalmazt!
   a) Igazolja, hogy V altér a legfeljebb harmadfokú, valós együttható polinomok vektorterében!
   b) Határozza meg a $V \subseteq P^3_{\mathbb{R}}$ altér dimenzióját!

c) Adjon meg egy olyan $V' \subseteq P_{\mathbb{R}}^3$ alteret, hogy $V \oplus V' = P_{\mathbb{R}}^3$ teljesüljön!
(Igazolja is választása helyességét!)

(10 pont)

5. Legyen a $z \neq 1$ komplex szám megoldása a $z^3 = 1$ egyenletnek. Számítsa ki a

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z & z^2 & 1 \\ z^2 & 1 & z \end{vmatrix}$$

determináns értékét! (10 pont)

6. Egy körvonal mentén elhelyezünk 9 pontot úgy, hogy bármely két pontot összekötő összes egyenest berajzolva az ábrába nincs három olyan egyenes, amelyeknek közös lenne a metszéspontjuk. Hány metszéspontja van a fenti egyeneseknek a kör belsejében?
(10 pont)

Beadási határidő: **2013. március 4.**
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!