# Matematikai feladatmegoldó verseny 2011/12.
# 4. forduló - megoldások

1. Az $f : [3, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln^p(\ln(x))}$ függvény nyilvánvalóan pozitív és folytonos.

$$\int_3^\infty \frac{1}{x\ln(x)\ln^p(\ln(x))}dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{x\ln(x)\ln^p(\ln(x))}dx, \tag{1}$$

valamint

$$\int_3^t \frac{1}{x\ln(x)\ln^p(\ln(x))}dx = \begin{cases} [\ln(\ln(\ln(x)))]_3^t, & p = 1, \\ \left[\frac{1}{1-p}\frac{1}{\ln^{p-1}(\ln(x))}\right]_3^t, & p > 1, \\ \left[\frac{1}{1-p}\ln^{1-p}(\ln(x))\right]_3^t, & 0 < p < 1. \end{cases}$$

Láthatjuk, hogy az (1) improprius integrál $0 < p \le 1$ esetén divergens, míg $p > 1$ esetén konvergens, így a vizsgált sorra is hasonló igaz.

2. $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$ $(x \in \mathbb{R})$, így

$$\frac{-2x+5}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}.$$

Ebből a szokásos módon kapjuk: $A = B = -1$.

Mivel

$$-\frac{1}{x-3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}, \quad x \ne 3,$$

ezért a geometriai sor konvergenciájáról és összegéről tanultak alapján

$$-\frac{1}{x-3} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad |x| < 3.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$-\frac{1}{x-2} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad |x| < 2.$$

Láthatjuk, hogy

$$\frac{-2x+5}{x^2-5x+6} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n, \quad |x| < 2.$$

3. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{|x|\,y^2}{x^2+y^4} \le \frac{\frac{x^2+y^4}{2}}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}, \quad (x,y) \ne (0,0).$$

Az $\left(\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^\infty$ értelmezési tartománybeli sorozatra

$$\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) \quad \text{és} \quad f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \ne 0,$$

így az átviteli elv szerint az $f$ nem folytonos a $(0,0)$-nál.

4. Nézzünk először egy a feltételt teljesítő sorozatot:

$$000000111111000000111111001111$$

Helyettesítsük a fenti sorozatban a két „10" mintát *-gal:

$$00000011111{*}0000011111{*}01111$$

Így egy $n-4$ hosszú bináris sorozat tagjai közé szúrtuk be a két *-ot. Könnyű belegondolni, hogy a csillag előtt, a két csillag között, és a második csillag után is egy olyan bináris sorozat áll, amelyben minden 0 a sorozat elején, minden 1 pedig a sorozat végén található, beleértve olyan sorozatokat is, amely csupa 0 vagy 1 elemekből áll. Ez a három sorozat egyértelműen meghatározza az eredeti sorozatot. Legyen $x_1$ db 0 és $x_2$ db 1 számjegy az első * előtt, $x_3$ db 0 és $x_4$ db 1 számjegy a két * között, és $x_5$ db 0 és $x_6$ db 1 számjegy a második * után. Ekkor

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n - 4 \tag{2}$$

egyenlet teljesül, ahol $x_1, \ldots, x_6$ nemnegatív egész számok. Ismert, hogy az

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$$

egyenlet nemnegatív egész megoldásainak a száma

$$\binom{m+k-1}{k},$$

ezért a (2) nemnegatív egész megoldásainak a száma, azaz a feladat feltételeit teljesítő bináris sorozatok száma

$$\binom{6+(n-4)-1}{n-4} = \binom{n+1}{n-4} = \binom{n+1}{5}.$$

5. Az 1,2,...,10 számokat a kör mentén felírva egy tetszőlegesen kiválasztott számtól kiindulva jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Ekkor egymás utáni 3 db szám kiválasztására az alábbi lehetőségek vannak:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 + a_2 + a_3,\\
s_2 &= a_2 + a_3 + a_4,\\
s_3 &= a_3 + a_4 + a_5,\\
s_4 &= a_4 + a_5 + a_6,\\
s_5 &= a_5 + a_6 + a_7,\\
s_6 &= a_6 + a_7 + a_8,\\
s_7 &= a_7 + a_8 + a_9,\\
s_8 &= a_8 + a_9 + a_{10},\\
s_9 &= a_9 + a_{10} + a_1,\\
s_{10} &= a_{10} + a_1 + a_2.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 3(1 + 2 + \cdots + 10) = 3\frac{10 \cdot 11}{2} = 165.$$

Ha $s_i \leq 16$ lenne minden $i = 1, 2, \ldots 10$-re, akkor $s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} \leq 160$ lenne, azaz legalább egy $s_i \geq 17$.

6. Vezessük be a $b_n = \sqrt{a_n}$ sorozatot. Ekkor

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}, \qquad b_0 = 1, \quad b_1 = 1.$$

A lineáris rekurzió karakterisztikus egyenlete

$$r^2 = r + 2,$$

amelynek megoldása $r_1 = 2$ és $r_2 = -1$. Ezért a lineáris rekurzió általános megoldása

$$b_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n.$$

A kezdeti feltételeket felhasználva

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ 2c_1 - c_2 &= 1, \end{aligned}$$

amiből $c_1 = 2/3$ és $c_2 = 1/3$. Így $b_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$, azaz

$$a_n = \left(\frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right)^2.$$