Matematikai feladatmegoldó verseny 2011/12.
2. forduló - megoldások

1. Mivel
$$\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2},$$
és az utóbbi tört számlálója és nevezője is 0-hoz tart, ha $x \to 0$, a L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Ha bevezetjük az $x = \frac{a}{b}$ jelölést, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség-rendszer ekvivalens az
$$1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1, \qquad \text{ha } x \ge 1$$
egyenlőtlenség-rendszerrel. Legyen $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, $x \ge 1$. Ekkor $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ge 0$, ha $x \ge 1$, ezért f monoton növekedő az $[1, \infty)$-en. Tehát $f(x) \ge f(1) = 0$, ha $x \ge 1$, azaz $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$, ha $x \ge 1$. Legyen $g(x) = x - 1 - \ln x$, $x \ge 1$. Ekkor $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \ge 0$, ha $x \ge 1$, ezért g monoton növekedő az $[1, \infty)$-en. Tehát $g(x) \ge g(1) = 0$, ha $x \ge 1$, azaz $\ln x \le x - 1$, ha $x \ge 1$.

3. Az $A^2 - 3A + E = 0$ feltételből $E = 3A - A^2$.
Így
$$A \cdot (3E - A) = A \cdot 3E - A^2 = 3AE - A^2 = 3A - A^2 = E,$$
továbbá
$$(3E - A) \cdot A = 3E \cdot A - A^2 = 3A - A^2 = E.$$
Ezért az invertálhatóság definíciója alapján $A^{-1} = 3E - A$.

4. a) A lineáris egyenletrendszer különböző bázismegoldásait úgy állíthatjuk elő, hogy bázistranszformációval megoldva az egyenletrendszert, a bázistranszformációt többféleképpen is elvégezzük.
Például, az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorokat bevonva a bázisba az alábbi táblázatot kapjuk:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	0	1	2	1	2
$\underline{a}_1$	1	0	0	1	3

Ekkor a szabad ismeretleneknek (x_3 és x_4) 0 értéket adva, a kötött ismeretlenek értéke éppen a $\underline{b}$ oszlopából kiolvasható koordinátákkal lesz egyenlő: $x_2 = 2$ és $x_1 = 3$. Így az egyenletrendszer egy bázismegoldása: $\underline{x} = (3, 2, 0, 0)$.
Ha az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_4$ vektorokat vonjik be a bázisba, akkor a következő táblázatot kapjuk:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_4$	0	1	2	1	2
$\underline{a}_1$	1	−1	−2	0	1

Az előzőekhez hasonlóan konstruált bázismegoldás a táblázat alapján az $\underline{x} = (1, 0, 0, 2)$ vektor.
Ha az $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_4$ vektorokat vonjuk be a bázisba, akkor az alábbi táblázatot kapjuk:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	−1	1	2	0	−1
$\underline{a}_4$	1	0	0	1	3

Az ebből kiolvasható bázismegoldás: $\underline{x} = (0, -1, 0, 3)$.

b) A bázistranszformációt a fenti egyenletrendszer esetén annyiféleképpen tudjuk végrehajtani, ahányféleképpen az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ vektorok közül 2 darab lineárisan független vektor kiválasztható. 4 vektor közül kettőt $\binom{4}{2} = 6$ féle képpen tudunk kiválasztani, de az $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok lineárisan összefüggőek, így a megfelelő kiválasztások száma $\binom{4}{2} - 1 = 5$. Tehát az egyenletrendszernek 5 különböző bázismegoldása van.

Általános esetben igaz az, hogy <u>legfeljebb</u> annyi bázismegoldás lehet, ahányféleképpen az n oszlopvektorból m darabot ki tudunk választani. Tehát a bázismegoldások száma $\leq \binom{n}{m}$.

5. Az $A_1, \ldots, A_k$ változókból felírt teljes konjunktív normálformán egy $K_1 \wedge \cdots \wedge K_\ell$ formulát értünk, ahol a K_i formulák k-tagú diszjunkciók, amelyben az $A_1, \ldots, A_k$ változók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlaul. Egy az $A_1, \ldots, A_k$ változókból felépült F logikai formula teljes konjuktív normálformáját úgy kapjuk, hogy felírjuk az igazságtábláját, és vesszük azokat a sorokat, ahol a formula logikai értéke hamis. Tegyük fel, hogy ℓ db ilyen sor van. Ekkor F teljes konjunktív normálformája $K_1 \wedge \cdots \wedge K_\ell$ alakú, ahol a K_i tagot úgy kapjuk, hogy vesszük az i-edik olyan sort az F igazságtáblájában, ahol a formula logikai értéke hamis. Ha az adott sorban az A_j változó logikai értéke igaz, akkor a K_i formulában szereplő diszjunkcióban $\neg A_j$ szerepel, ha pedig az A_j változó logikai értéke hamis, akkor a diszjunkcióban A_j szerepel.

Tegyük fel, hogy F ekvivalens egy olyan formulával, amely az $A_1, \ldots, A_k$ változókból és a $\vee$, $\wedge$ és $\rightarrow$ műveletekből épült fel. Ekkor F igazságtáblázatát felírva abban a sorban, ahol minden változó logikai értéke igaz, F logikai értéke igaz, hiszen $i \vee i = i$, $i \wedge i = i$ és $i \rightarrow i = i$. Ekkor a fentiek szerint a teljes konjunktív normálformában az ehhez a sorhoz tartozó $(\neg A_1) \vee \cdots \vee (\neg A_k)$ tag nem szerepel.

Fordítva, tegyük fel, hogy a teljes konjunktív normálformában nem szerepel a $(\neg A_1) \vee \cdots \vee (\neg A_k)$ tag, azaz minden K_i tagban szerepel negálatlan változó is. Tekintsünk például egy

$$K_i = A_1 \vee \cdots \vee A_s \vee (\neg A_{s+1}) \vee \cdots \vee (\neg A_k)$$

alakú tagot. Ismert azonosságok alkalmazásával kapjuk, hogy

$$K_i \equiv A_1 \vee \cdots \vee A_s \vee \Big(\neg(A_{s+1} \wedge \cdots \wedge A_k)\Big) \equiv (A_{s+1} \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A_1 \vee \cdots \vee A_s).$$

Hasonlóan látható, hogy minden $K_1, \ldots, K_\ell$ tag $\vee$, $\wedge$ és $\rightarrow$ műveletek segítségével felírt formulával ekvivalens, így az F formula is elvivalens egy $\vee$, $\wedge$ és $\rightarrow$ műveletekből felépített formulával.

6. a) Tegyük fel először, hogy $|z| = 1$. Ekkor $1 = |z|^2 = z\overline{z}$, valamint $|\overline{z}| = 1$. Így

$$\frac{|z-w|}{|1-\overline{z}w|} = \frac{|z-w|}{|z\overline{z}-\overline{z}w|} = \frac{|z-w|}{|\overline{z}||z-w|} = 1.$$

b) Most tekintsük azt az esetet, amikor $|w| = 1$. Az $1 = |w|^2 = w\overline{w}$ és $|z-w| = |\overline{z-w}| = |\overline{z}-\overline{w}|$ azonosságok alapján

$$\frac{|z-w|}{|1-\overline{z}w|} = \frac{|z-w|}{|w\overline{w}-\overline{z}w|} = \frac{|z-w|}{|w||\overline{w}-\overline{z}|} = 1.$$