Matematikai feladatmegoldó verseny 2011/12.
1. forduló - megoldások

1. Az $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, ha $a+b\neq 0$ azonosság felhasználásával kapjuk, hogy $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ =\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\ \frac{1}{2}$ minden n-re. Ezért $0\leq\ \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n\leq\ \frac{1}{2^n}$ minden n-re. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\ \frac{1}{2^n}=0$, a rendőr-elv szerint $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n=\ 0.$

2. Minden n-re $\frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{3}-1}\ =\ \frac{\left(\sqrt[n]{3}\right)^2-1}{\sqrt[n]{3}-1}\ =\frac{\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\left(\sqrt[n]{3}+1\right)}{\sqrt[n]{3}-1}\ =\ \sqrt[n]{3}+1$. Mivel $\sqrt[n]{3}\to 1$, ha $n\to\infty$, azt kapjuk, hogy $\frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{3}-1}\ =\ \sqrt[n]{3}+1\ \to 2$, ha $n\to\infty$.

3. a) Keressünk két olyan pontot, amely rajta van az e' vetületegyenesen! Ilyen pont az e egyenes és az S sík metszéspontja. Írjuk fel az e egyenes paraméteres egyenletrendszerét:

$$\begin{aligned} x &= -2+\frac{1}{2}t \\ y &= 5 \\ z &= -t \end{aligned}$$

Innen x, y és z t-től függő alakját az S sík egyenletébe helyettesítve a

$$2\ \cdot(-2+1/2\cdot t)\ +5+3\ \cdot(-t)=29$$

egyenletet kapjuk. Ennek $t=-14$ megoldását az e paraméteres egyenletrendszerébe visszahelyettesítve a metszéspont: $M=(-9,\ 5,\ 14)$. Az e egyenes egy másik pontja a $P_0=(-2,\ 5,\ 0)$ pont. Határozzuk meg ennek az S síkra eső merőleges vetületét! Ehhez felírjuk a P_0 ponton áthaladó, S síkra merőleges g egyenes paraméteres egyenletrendszerét $\left(\underline{v}_g=\underline{n}_S=(2,\ 1,\ 3)\right)$:

$$g:\quad \begin{aligned} x &= -2+2t \\ y &= 5+t \\ z &= 3t \end{aligned}$$

Ezután a fentiekhez hasonlóan meghatározzuk g és S metszéspontját: $Q=(2,\ 7,\ 6)$. A keresett e' egyenes az M és Q pontokra illeszkedik, így egy irányvektora a $\underline{v}=\ \overrightarrow{MQ}\ =(11,\ 2,\ -8)$ vektor, paraméteres egyenletrendszere:

$$e':\quad \begin{aligned} x &= 2+11t \\ y &= 7+2t \\ z &= 6-8t \end{aligned}$$

b) A feltételeknek megfelelő S' sík tartalmazza az M és Q pontokat, valamint egy olyan pontot, amely nincs az S síkon. Legyen ez például $P=(1,\ 1,\ 1)$. Ekkor az S' sík egy normálvektora az $\underline{n}=\overrightarrow{PM}\ \times\ \overrightarrow{PQ}=(-10,\ 4,\ 13)\times(1,\ 6,\ 5)=(-58,\ 63,\ -64)$ vektor. Így egy a feltételeknek megfelelő S' sík egyenlete: $-58\,(x-1)+63\,(y-1)-64\,(z-1)=0$, azaz $-58x+63y-64z=\ -59$.

4. a) Jelöljük az alterek megadásában szereplő vektorokat az alábbi módon: $\underline{a}_1=(1,\ 0,\ 2,\ 1,\ -1)$, $\underline{a}_2=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ )$, $\underline{a}_3=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\underline{a}_4=(5,\ 3,\ 7,\ 5,\ 1)$, $\underline{a}_5=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 0)$. A V_1+V_2 altér egy bázisát a $H=\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_3,\ \underline{a}_4,\ \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz egy maximális lineárisan független részhalmaza adja, így a V_1+V_2 altér dimenziója a H vektorhalmaz rangjával egyenlő. Bázistranszformációt alkalmazva:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{e}_1$	1	1	1	5	2
$\underline{e}_2$	0	1	0	3	(1)
$\underline{e}_3$	2	1	0	7	3
$\underline{e}_4$	1	1	0	5	2
$\underline{e}_5$	-1	1	0	1	0

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_3$	1	-1	1	-1	0
$\underline{a}_5$	0	1	0	3	1
$\underline{e}_3$	2	-2	0	-2	0
$\underline{e}_4$	(1)	-1	0	-1	0
$\underline{e}_5$	-1	1	0	1	0

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_3$	0	0	1	0	0
$\underline{a}_5$	0	1	0	3	1
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0
$\underline{a}_1$	1	-1	0	-1	0
$\underline{e}_5$	0	0	0	0	0

Mivel a bázisba bevonható vektorok maximális száma 3, így $\dim(V_1+V_2) = r(H) = 3$.
A V_1+V_2 altér egy bázisa: $B = \{\underline{a}_1,\ \underline{a}_3,\ \underline{a}_5\}$.

b) Mivel $\dim(V_1+V_3) =\ 3$, így $V_1+V_2 \neq R^5$. Mivel $V_1+V_2 = R^5$ szükséges (de nem elégséges) feltétele annak, hogy $R^5 = V_1 \oplus\ V_2$ teljesülhessen, így $R^5 \neq V_1 \oplus\ V_2$.

5. a) n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk az állítást. A φ leképezés definíciója szerint

$$\begin{aligned} 00\varphi &= 0101, \\ 01\varphi &= 0110, \\ 10\varphi &= 1001, \\ 11\varphi &= 1010, \end{aligned}$$

így $n=2$-re teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy n-hosszú $a = a_1 \cdots a_n$ sorozatokra igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy ebből következik egy tetszőleges $a = a_1 \cdots a_n a_{n+1}$ sorozatra is az állítás. A φ leképezés definíciója szerint

$$a\varphi = a'_1 \cdots a'_n a'_{n+1}.$$

Az indukciós hipotézis szerint az $a'_1 \cdots a'_n$ $2n$ hosszú sorozatban nincs három egyenlő elem egymás után, és az $n=2$ eset szerint pedig az $a'_n a'_{n+1}$ 4 hosszú sorozatban sincs, és ezért az $a'_1 \cdots a'_n a'_{n+1}$ sorozatban sincs három egyenlő elem egymás után. Ezzel beláttuk az állítás első felét.

b)

$$\begin{aligned} 00\varphi^2 &= 0101\varphi = 01100110, \\ 01\varphi^2 &= 0110\varphi = 01101001, \\ 10\varphi^2 &= 1001\varphi = 10010110, \\ 11\varphi^2 &= 1010\varphi = 10011001, \end{aligned}$$

azaz $n=2$-re igaz, hogy minden legalább 5 hosszúságú blokkja tartalmaz 00 vagy 11 elemsorozatot. $n>2$-re az a) ponthoz hasonlóan teljes indukcióval következik az állítás.

6. Használva az

$$\begin{aligned} (5\,1\,4)^{10} &= (5\,1\,4)^9(5\,1\,4) = (5\,1\,4), \\ (1\,2\,7\,3)^{11} &= (1\,2\,7\,3)^8(1\,2\,7\,3)^3 = (1\,3\,7\,2), \\ (6\,2\,5\,1\,4)^{23} &= (6\,2\,5\,1\,4)^{20}(6\,2\,5\,1\,4)^3 = (6\,1\,2\,4\,5), \\ (1\,3\,2\,6\,7)^{12} &= (1\,3\,2\,6\,7)^{10}(1\,3\,2\,6\,7)^2 = (1\,2\,7\,3\,6) \end{aligned}$$

összefüggéseket, az egyenlet az

$$(5\,1\,4)(1\,3\,7\,2)\sigma^{-1}(6\,1\,2\,4\,5) = (1\,2\,7\,3\,6)$$

alakban írható fel. Ebből az egyes permutációk inverzével beszorozva az egyenletet kapjuk

$$(1\,3\,7\,2)\sigma^{-1} = (5\,1\,4)^{-1}(1\,2\,7\,3\,6)(6\,1\,2\,4\,5)^{-1},$$

és így

$$\sigma^{-1} = (1\,3\,7\,2)^{-1}(5\,1\,4)^{-1}(1\,2\,7\,3\,6)(6\,1\,2\,4\,5)^{-1}.$$

Az egyenlet mindkét oldalának inverzét véve és alkalmazva a $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$ és a $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1}\cdots\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ azonosságokat, kapjuk

$$\begin{aligned} \sigma &= (6\,1\,2\,4\,5)(1\,2\,7\,3\,6)^{-1}(5\,1\,4)(1\,3\,7\,2) \\ &= (6\,1\,2\,4\,5)(6\,3\,7\,2\,1)(5\,1\,4)(1\,3\,7\,2) \\ &= (1\,4\,3\,2\,5\,7). \end{aligned}$$