



PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2011/12.

5. FORDULÓ

1. feladat

Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy az f nem korlátos a $(0, 0)$ egyetlen környezetében sem, de az f bármely origóra illeszkedő egyenesre való leszűkítése folytonos! 10 pont

2. feladat

Adja meg egy r sugarú félgömbbe írható maximális térfogatú téglatest éleinek a hosszát! 10 pont

3. feladat

Legyen $H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a} \leq y \leq a \right\}$, ahol $a > 0$. Polárkoordinátás helyettesítés után

írja fel az $\iint_H f(x, y) dx dy$ integrált egyszeres integrálokkal! 10 pont

4. feladat

Legyen G egy egyszerű gráf, amely egyben síkbeli térkép. G triangularizációján egy olyan síkbeli térképet értünk, amelyet G -ből úgy kapunk, hogy G -beli csúcsokat kötünk össze új éllel oly módon, hogy az él hozzáadása után keletkező gráf is egyszerű és síkbeli térkép marad, egészen addig, amíg ezzel a feltétellel további élt nem tudunk berajzolni. Mutassa meg, hogy G bármely triangularizációjában a $3o = 2e$ összefüggés teljesül, ahol o az országok száma, e az élek száma! 10 pont

5. feladat

Legyen G egy egyszerű n -pontú gráf, és legyen $A = (a_{i,j})$ $n \times n$ -es mátrix a G gráf csúcsmátrixa, azaz $a_{i,j} = 1$, ha létezik az i -edik és j -edik csúcs között él G -ben, illetve $a_{i,j} = 0$, ha nem létezik. Legyen $B = A^k$ valamely pozitív egész k -ra. Mi a $B = (b_{i,j})$ mátrix $b_{i,j}$ elemeinek a jelentése? Igazolja az állítását! 10 pont

6. feladat

Jelölje (x, y) az x és y egész számok legnagyobb közös osztóját. Legyen b és $g > 0$ egész számok. Mutassa meg, hogy az

$$(x, y) = g \quad \text{és} \quad xy = b$$

egyenleteknek akkor és csak akkor létezik közös megoldása az egész számok körében, ha $g^2 | b$. 10 pont

Beadási határidő: 2012. május 7.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!