



# PANNON EGYETEM

## MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

### MATEMATIKA TANSZÉK

## MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2011/12.

### 2. FORDULÓ

#### 1. feladat

Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

határértéket!

10 pont

#### 2. feladat

Bizonyítsa be, hogy ha  $0 < b \leq a$ , akkor  $\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$  !

10 pont

#### 3. feladat

Legyen  $A$   $n \times n$ -es mátrix. Mutassa meg, hogy ha

$$A^2 - 3A + E = 0, \quad \text{akkor } A^{-1} = 3E - A \quad !$$

( $E$  az  $n \times n$ -es egységmátrixot,  $0$  az  $n \times n$ -es nullmátrixot jelöli).

10 pont

#### 4. feladat

Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszer bázismegoldásának nevezzük az  $\underline{x}$  megoldásvektort, ha komponensei között található  $n-k$  db nulla, továbbá a maradék  $k$  komponenshez tartozó oszlopvektorok az  $A$  mátrixban lineárisan függetlenek ( $n$  az ismeretlenek száma,  $k=r(A)$ ). A szabad ismeretleneket nullának választva mindig bázismegoldást kapunk. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

- a) Bázistranszformációs megoldást használva keressen 3 különböző bázismegoldást!
- b) Hány különböző bázismegoldása van a fenti lineáris egyenletrendszernek?
- c) Adjon felső korlátot az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer különböző bázismegoldásainak számára, ha  $A$   $m \times n$ -es mátrix és  $r(A) = r([A, \underline{b}]) = k$  !

10 pont

## 5. feladat

Legyen  $F(A_1, A_2, \dots, A_k)$  egy logikai formula, amely nem tautológia. Mutassa meg, hogy  $F$  akkor és csak akkor ekvivalens egy az  $A_1, A_2, \dots, A_k$  változókból az  $\wedge, \vee, \rightarrow$  logikai műveletek segítségével felépített formulával, ha  $F$  teljes konjunktív normálformájában nem szerepel a  $(\neg A_1) \vee (\neg A_2) \vee \dots \vee (\neg A_k)$  tag.

10 pont

## 6. feladat

Legyenek  $z, w \in \mathbb{C}$  komplex számok, amelyekre  $\bar{z}w \neq 1$ . Mutassa meg, hogy ha  $|z| = 1$  vagy  $|w| = 1$ , akkor

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1.$$

10 pont

**Beadási határidő: 2011. december 5.**

**Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!**