Matematikai feladatmegoldó verseny 2010/11.
3. forduló - megoldások

1. Mivel $k \geq 1$ esetén
$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right),$$
ezért
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$
Tehát
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}.$$

2. Mivel
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
ezért
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \in (0,\infty)$$
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonikus) sor divergens, ezért az összehasonlító kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$ sor is divergens.

3. 1) Állítás: <u>igaz</u>
<u>Bizonyítás:</u> Ha $\underline{v}$ λ sajátértékű sajátvektora az A lineáris transzformációnak és $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha \cdot \underline{v}$ vektor is nullvektortól különböző vektor, továbbá:
$$A(\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot A(\underline{v}) = \alpha \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot (\alpha \underline{v}).$$
Így $\alpha \cdot \underline{v}$ is λ sajátértékű sajátvektor.
2) Állítás: <u>hamis</u>
<u>Ellenpélda:</u> Legyen
$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \to (2x_1 + x_2, 3x_2).$$
Ellenőrizhető, hogy az A lineáris transzformációnak $\lambda_1 = 2$ sajátértékű sajátvektora a $\underline{v}_1 = (1,0)$ vektor és $\lambda_2 = 3$ sajátértékű sajátvektora a $\underline{v}_2 = (1,1)$ vektor.
Legyen $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.
Ekkor
$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (2,1).$$
Ez a vektor nem sajátvektora A-nak.
3) Állítás: <u>hamis</u>
<u>Ellenpélda:</u> Az előző A lineáris transzformációt tekintve annak $\lambda = 2$ sajátértékű sajátvektora a
$$\underline{v}_1 = (1,0) \quad \text{és a} \quad \underline{v}_2 = (-1,0)$$
vektor is. Legyen $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.
$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0,0),$$
ami nem sajátvektor.
<u>Megjegyzés:</u> Ha a 3. állításban szerepelne az a további feltétel, hogy $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek, akkor az állítás igaz lenne.

4. (a) Legyen $\underline{v}_j \in H$ tetszőleges. Ekkor a skaláris szorzat bilinearitása alapján:

$$\left\langle \underline{x} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i\rangle} \cdot \underline{v}_i, \quad \underline{v}_j \right\rangle = \langle \underline{x},\ \underline{v}_j\rangle -$$

$$-\left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i\rangle} \cdot \underline{v}_i, \quad \underline{v}_j \right\rangle = \langle \underline{x},\ \underline{v}_j\rangle -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i\rangle} \cdot \langle \underline{v}_i, \quad \underline{v}_j\rangle \overset{(\star)}{=} \langle \underline{x},\ \underline{v}_j\rangle - \frac{\langle \underline{x},\ \underline{v}_j\rangle}{\langle \underline{v}_j, \underline{v}_j\rangle} \cdot \langle \underline{v}_j, \underline{v}_j\rangle = 0.$$

$(\star)$ lépésnél a H vektorhalmaz ortogonalitását használtuk ki, azaz, hogy $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j\rangle = 0$, ha $i \neq j$.
Így az $\underline{x} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i\rangle} \cdot \underline{v}_i$, vektor ortogonális a H vektorhalmaz minden vektorára.

(b) Legyen

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 1, -1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 2, 0, 2) \quad \text{és} \quad \underline{v}_3 = (1, -2, -3, 0)\,.$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle = 0, \qquad \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3\rangle = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3\rangle = 0.$$

Így a H vektorhalmaz nullvektortól különböző, páronként ortogonális vektorokból áll, tehát H ortogonális vektorhalmaz.
Határozzuk meg az

$$\underline{y} = \underline{x} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i\rangle} \cdot \underline{v}_i$$

vektort!

$$\underline{y} = \underline{x} - \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_1\rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1\rangle} \cdot \underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_2\rangle}{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2\rangle} \cdot \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{x}, \underline{v}_3\rangle}{\langle \underline{v}_3, \underline{v}_3\rangle} \cdot \underline{v}_3 =$$
$$= (1,1,1,1) - \frac{0}{4} \cdot (1,-1,1,-1) - \frac{8}{24} \cdot (4,2,0,2) - \frac{-4}{14} \cdot (1,-2,-3,0) =$$
$$= \left(-\frac{1}{21}, -\frac{5}{21}, \frac{3}{21}, \frac{7}{21}\right).$$

Az $\underline{y}$ vektor nullvektortól különbző és ortogonális H minden elemére. Így a $H' = H \cup \{\underline{y}\}$ vektorhalmaz is ortogonális R^4-ben. A H vektorhalmaz két vektorral nem bővíthető úgy, hogy az ortogonalitás megőrződjön. Ugyanis, minden ortogonális vektorhalmaz lineárisan független, az R^4 vektortérben pedig 5 vektor nem alkothat lineárisan független vektorhalmazt.

5. (a) Legyen $o(a) = k$, azaz $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb kitevő, amelyre $a^k = e$, ahol e a csoport egységeleme, és legyen $\ell = o(b^{-1}ab)$, azaz ℓ a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $(b^{-1}ab)^\ell = e$. Ekkor

$$(b^{-1}ab)^k = (b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\cdots(b^{-1}ab) = b^{-1}a(bb^{-1})a(bb^{-1})\cdots ab = b^{-1}a^kb = b^{-1}eb = b^{-1}b = e,$$

és így ℓ definíciója szerint $\ell \leq k$. Fordítva, az előző számoláshoz hasonlóan $e = (b^{-1}ab)^\ell = b^{-1}a^\ell b$, amiből balról b-vel és jobbról b^{-1}-zel beszorozva kapjuk, hogy $e = bb^{-1} = a^\ell$. Ezért k definíciója miatt $k \leq \ell$. De ekkor $k = \ell$ teljesül.

(b) Legyen $k = o(ab)$ és $\ell = o(ba)$. Ekkor

$$(ba)^k = (ba)\cdots(ba) = b(ab)\cdots(ab)a = b(ab)^{k-1}a = b(ab)^{k-1}abb^{-1} = b(ab)^kb^{-1} = bb^{-1} = e,$$

amiből $\ell \leq k$. Ugyanígy kapjuk, hogy $k \leq \ell$, amiből $k = \ell$ következik.

6. Induljunk ki az

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

binomiális tételből. Ebből az $y = 1$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

azonosságot. Ezt deriválva

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(x+1)^{n-1}$$

adódik, ahonnan $x = 1$-re kapjuk a bizonyítandó állítást.