Matematikai feladatmegoldó verseny 2010/11
1. forduló — megoldások

1. Indukcióval lehet bizonyítani, hogy $\{a_n\}$ monoton növekedő és $1 \le a_n \le 2$, minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel $\{a_n\}$ monoton és korlátos, ezért konvergens is. Az
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 16}{10}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
egyenletből határátmenet után kapjuk, hogy
$$a = \frac{a^2 + 16}{10},$$
ahol $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ennek két lehetséges megoldása $a = 2$ vagy $a = 8$.
Az $1 \le a_n \le 2, \quad n \in \mathbb{N}$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $1 \le a \le 2$. Ezért $a = 2$.

2. A
$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$
reláció alapján
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e \approx 2,7$$
Tehát minden elég nagy n-re
$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \le 3,$$
s ezért
$$\sqrt[n]{2} \le \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} \le \sqrt[n]{3}$$
minden nagy n-re. Mivel
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1,$$
a rendőrelv szerint
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1.$$

3. (a) Legyen S az a sík, amelyben az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok elhelyezkednek. Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor vagy nullvektor (ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$), vagy nullvektortól különböző, az S-re merőleges vektor (ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$). Hasonlóan a $\underline{c} \times \underline{d}$ vektor is, vagy nullvektor (ha $\underline{c} \parallel \underline{d}$), vagy nullvektortól különböző, az S-re merőleges vektor (ha $\underline{c} \nparallel \underline{d}$). Mindegyik esetben az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c} \times \underline{d}$ vektorok párhuzamosak, így vektoriális szorzatuk nullvektor. Az állítás megfordítva nem igaz. Ellenpélda: legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ teret kifeszítő térbeli vektorok (azaz ne essenek egy síkra), és legyen a $\underline{d}$ vektor párhuzamos $\underline{c}$-vel. Ekkor
$$\underline{c} \times \underline{d} = \underline{o}$$
így
$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{o} = \underline{o}.$$

(b) Alkalmazzunk bázistranszformációt!

bázis	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$	$\underline{d}$
$\underline{e}_1$	2	4	8	10
$\underline{e}_2$	-1	1	-1	-2
$\underline{e}_3$	3	1	7	10

$\Longrightarrow$

bázis	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$	$\underline{d}$
$\underline{a}$	1	0	2	3
$\underline{b}$	0	1	1	1
$\underline{e}_3$	0	0	0	0

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ bázisba vonása után látható, hogy a $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok előállnak az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz benne vannak az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkban. Tehát az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok egy síkban helyezkednek el.

$$\underline{a} \times \underline{b} = (2, -1, 3) \times (4, 1, 1) = (-4, 10, 6)$$

$$\underline{c} \times \underline{d} = (8,-1,7) \times (10,-2,10) = (4,-10,-6)$$

Így

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (-4,10,6) \times (4,-10,-6) = (0,0,0) = \underline{0}.$$

4. (a) **(1)** Indirekt bizonyítás: Tegyük fel, hogy H lineárisan független vektorhalmaz, $\underline{x}$ nem áll elő H-beli vektorok lineáris kombinációjaként, ugyanakkor a $H \cup \{\underline{x}\}$ vektorhalmaz lineárisan összefüggő. Ekkor létezik olyan nemtriviális lineáris kombináció, amely H-beli vektorokból - legyenek ezek a $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ vektorok - és az $\underline{x}$ vektorból nullvektort állít elő:

$$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + ... + \lambda_k \cdot \underline{v}_k + \lambda \cdot \underline{x} = \underline{o},$$

nemtriviálisan. Ha $\lambda = 0$, akkor a $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ (H-beli)vektorokból nem triviálisan előáll a nullvektor, azaz H lineárisan összefüggő. $\Longrightarrow$ Ellentmondás. Ha $\lambda \neq 0$, akkor a fenti vektoregyenletből $\underline{x}$ kifejezhető, azaz előállítható a $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ (H-beli)vektorok lineáris kombinációjaként. $\Rightarrow$ Ellentmondás. Tehát a megadott feltételek mellett $H \cup \{\underline{x}\}$ is lineárisan független.

(2) Tegyük fel, hogy az $\underline{x} \in H$ vektor előáll a $H \setminus \{\underline{x}\}$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{x} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + ... + \lambda_k \cdot \underline{v}_k \qquad (*)$$

ahol

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k \in H \setminus \{\underline{x}\}.$$

$$\mathcal{L}(H \setminus \{\underline{x}\}) \subseteq \mathcal{L}(H)$$

ez nyilvánvaló.

Legyen $\underline{a} \in \mathcal{L}(H)$ tetszőleges. Ekkor $\underline{a}$ előáll H-beli vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a} = \alpha_1 \cdot \underline{w}_1 + ... + \alpha_\ell \cdot \underline{w}_\ell + \alpha \cdot \underline{x},$$

ahol $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_\ell \in H \setminus \{\underline{x}\}$. A $(*)$ vektoregyenletet felhasználva:

$$\underline{a} = \alpha_1 \cdot \underline{w}_1 + ... + \alpha_\ell \cdot \underline{w}_\ell + \alpha \cdot (\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + ... + \lambda_k \cdot \underline{v}_k),$$

azaz az $\underline{a}$ vektor előáll $H \setminus \{\underline{x}\}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként is.

Így

$$\mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(H \setminus \{\underline{x}\})$$

Tehát

$$\mathcal{L}(H \setminus \{\underline{x}\}) = \mathcal{L}(H).$$

(b) Például:

(1)

$$H := \{(2,1,0), \quad (-1,3,0)\}, \qquad \underline{x} := (2,4,5)$$

Ekkor $\underline{x}$ nem áll elő H-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$H \cup \{\underline{x}\} = \{(2,1,0), \quad (-1,3,0), \quad (2,4,5)\}$$

lineárisan független (bázistranszformációval könnyen ellenőrizhető).

(2)

$$H := \{(1,0,0), \quad (1,1,0), \quad (1,1,1) \quad (3,2,1)\},$$

Az $\underline{x} = (3,2,1)$ vektor előáll $H \setminus \{\underline{x}\}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$\underline{x} = (3,2,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,1,1)$$

A megadott példában

$$\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H \setminus \{\underline{x}\}) = \mathbb{R}^3$$

5. Tudjuk (Szendrei jegyzet II.3.13. Tétel), hogy ha egy szorzat leképezés bijektív, akkor az első leképezés injektív, a második pedig szürjektív. Ebből következik, hogy mivel a $\varphi\psi\eta$ szorzat identikus, így bijektív is, ezért φ injektív, η pedig szürjektív. Mivel a feltétel szerint η injektív is, ezért η bijektív, és így invertálható is. De ekkor a $\varphi\psi\eta = id_A$ egyenletet jobbról szorozva η^{-1}-gyel kapjuk, hogy
$$\varphi\psi = \varphi\psi\eta\eta^{-1} = id_A\eta^{-1} = \eta^{-1}$$
bijektív, hiszen bijektív leképezés inverze is bijektív. Ezt pedig ψ^{-1}-gyel jobbról szorozva kapjuk, hogy
$$\varphi = \eta^{-1}\psi^{-1}$$
is bijektív, hiszen bijekciók szorzata bijekció. Azaz φ szürjektív is.

6. Legyen ρ egy A halmazon definiált részbenrendezés, azaz reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció. Ekkor könnyű indokolni, hogy ρ^{-1} szintén reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz szintén részbenrendezés. Például a tranzitivitáshoz tegyük fel, hogy $c\,\rho^{-1}\,b$ és $b\,\rho^{-1}\,a$ teljesül. Ekkor $a\,\rho\,b$ és $b\,\rho\,c$ következik, amiből ρ tranzitivitását felhasználva kapjuk, hogy $a\,\rho\,c$, és így $c\,\rho^{-1}\,a$ is teljesül, amiből ρ^{-1} tranzitivitása következik.

   Ha $\rho \neq \omega_A$, akkor létezik olyan $a \neq b$, amelyre $a\,\rho\,b$, és így $b\,\rho^{-1}\,a$ is teljesül. De ekkor ρ^{-1} antiszimmetriája miatt $a\,\rho^{-1}\,b$ már nem teljesül, azaz $\rho \neq \rho^{-1}$. Egyedül a $\rho = \omega_A$ identikus relációra (ami szintén részbenrendezés) teljesül a $\rho = \rho^{-1}$ összefüggés. Ebből következik, hogy az összes részbenrendezés relációt az inverzével párosítva az identikus relációnak nem lesz "párja", azaz összesen páratlan sok részbenrendezés definiálható A-n.