PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2010/11.

3. FORDULÓ

1. feladat:

Számítsa ki az

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$$

számsor összegét! 10 pont

2. feladat:

Konvergens-e a

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots$$

számsor? 10 pont

3. feladat:

Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak! Az igaz állításokat bizonyítsa, a hamisakat ellenpéldával cáfolja!

Legyen $A: R^n \to R^n$ lineáris transzformáció.

1) Ha a $\underline{v} \in R^n$ vektor sajátvektora A-nak, akkor az $\alpha\cdot\underline{v}\in R^n$ $(\alpha\in R,\quad \alpha\neq 0)$ vektor is sajátvektora az A lineáris transzformációnak.

2) Ha a $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k \in R^n$ vektorok sajátvektorai A-nak, akkor az $\alpha_1\cdot\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\cdot\underline{v}_k$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\neq 0)$ vektor is sajátvektora az A lineáris transzformációnak.

3) Ha a $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k \in R^n$ vektorok λ sajátértékű sajátvektorai A-nak, akkor az $\alpha_1\cdot\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\cdot\underline{v}_k$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\neq 0)$ vektor is λ sajátértékű sajátvektora az A lineáris transzformációnak.

10 pont

4. feladat:

a) Igazolja az alábbi állítást!

Ha $H=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}\subset R^n$ ortogonális vektorhalmaz és $\underline{x}\in R^n$ tetszőleges vektor, akkor az

$$\underline{x}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \underline{x},\underline{v}_i\rangle}{\langle \underline{v}_i,\underline{v}_i\rangle}\cdot\underline{v}_i$$ vektor ortogonális a H vektorhalmaz minden vektorára.

b) Legyen $H=\{(1,-1,1,-1),(4,2,0,2),(1,-2,-3,0)\}$ és $\underline{x}=(1,1,1,1)$.

Ellenőrizze, hogy H ortogonális!

A fenti állítást felhasználva bővítse a H vektorhalmazt egy vektorral úgy, hogy továbbra is ortogonális vektorhalmazt kapjunk!

Bővíthető-e két vektorral H úgy, hogy az ortogonalitás megőrződjön?

10 pont

5. feladat:

Mutassa meg, hogy egy tetszőleges csoport bármely a,b elemeire teljesül

a) $o(a)=o(b^{-1}ab)$

b) $o(ab)=o(ba)$,

ahol $o(a)$ az a elem rendjét jelöli.

10 pont

6. feladat:

Bizonyítsa be az

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$$

azonosságot tetszőleges pozitív n-re!

10 pont

Beadási határidő: 2011. február 28.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!