



PANNON EGYETEM
MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR
MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2010/11.

1. FORDULÓ

1. feladat:

Legyen

$$a_1 = 1 \text{ és } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 16}{10}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Konvergens-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat? Ha igen, adja meg a határértékét is.

10 pont

2. feladat:

Számítsa ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{határértékét!}$$

10 pont

3. feladat:

a) Igazolja az alábbi állítást!

Ha az \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} térbeli vektorok egy síkban helyezkednek el, akkor

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = \underline{o}.$$

Igaz-e az állítás megfordítása?

b) Legyen $\underline{a} = (2, -1, 3)$, $\underline{b} = (4, 1, 1)$, $\underline{c} = (8, -1, 7)$, $\underline{d} = (10, -2, 10)$.

Mutassa meg, hogy az \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} vektorok egy síkban vannak!

Ellenőrizze a fenti vektorokra az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = \underline{o}$ egyenlőséget!

10 pont

4. feladat

a) Igazolja az alábbi állítást (Plusz/mínusz tétel)!

Legyen H egy nemüres vektorhalmaz R^n -ben.

(1) Ha H lineárisan független és az $\underline{x} \in R^n$ vektor nem állítható elő H -beli vektorok lineáris kombinációjaként, akkor a $H \cup \{\underline{x}\}$ vektorhalmaz is lineárisan független.

(2) Ha az $\underline{x} \in H$ vektor előáll $H \setminus \{\underline{x}\}$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként, akkor $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H \setminus \{\underline{x}\})$.

b) Illusztrálja a fenti tétel (1) és (2) állítását konkrét R^3 -beli példákkal!

10 pont

5. feladat

Mutassa meg, hogy ha a $\varphi: A \rightarrow B$, $\psi: B \rightarrow C$ és $\eta: C \rightarrow A$ leképezésekre

$$\varphi\psi\eta = id_A,$$

továbbá ψ bijektív, η pedig injektív, akkor a φ leképezés szürjektív!

10 pont

6. feladat

Mutassa meg, hogy egy véges halmazon páratlan sok különböző részbenrendezés definiálható!

10 pont

Beadási határidő: 2010. november 2.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!