Matematikai feladatmegoldó verseny 2009/10
3. forduló — megoldások

1. Az

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}, \qquad x \geq 1$$

függvény folytonos és minden $x > 1$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} > 0.$$

Tehát f szigorúan monoton növekedő az $[1, \infty)$intervallumban. Ezért

$$f(x) > f(1) = 0, \qquad \text{ha} \quad x > 1,$$

amely ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

2. Helyezzük el a háromszöget koordinátarendszerben úgy, hogy alapja az x tengelyen a $[0, a]$ intervallum legyen, a harmadik csúcsa pedig az $y = m$ egyenes valamely (x, m) pontja legyen. Ekkor a háromszög $K = K(x)$ kerülete:

$$K(x) = a + \sqrt{x^2 + m^2} + \sqrt{(x-a)^2 + m^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

A

$$K'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + m^2}} + \frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + m^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

összefüggésből könnyű belátni, hogy K' egyetlen zérushelye az $x = a/2$ pont. Továbbá, $K'(0) < 0$ és $K'(a) > 0$. A K' függvény folytonossága folytán $K' < 0$ a $(-\infty, a/2)$ intervallumban és $K' > 0$ az $(a/2, \infty)$ intervallumban. Tehát az $x = a/2$ pont K szigorú minimumhelye, ami azt jelenti, hogy legkisebb kerülete az a alapú egyenlő szárú háromszögnek van.

3. a)

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{itt} \ \ a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

így $A + A^T$ szimmetrikus.

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ -8 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{itt} \ \ a_{ij} = -a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

így $A - A^T$ antiszimmetrikus.

b)

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 5 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3 & 7/2 \\ 0 & 7/2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & 4 \\ 3/2 & 0 & 5/2 \\ -4 & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Legyen $A = (a_{ij})_{n\times n}$ valós elemekből felépülő négyzetes mátrix.

$$\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \cdot (a_{ij} + a_{ji})_{n\times n} + \frac{1}{2} \cdot (a_{ij} - a_{ji})_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} = A$$

Az $\frac{1}{2} \cdot \left(A + A^T\right)$ mátrix szimmetrikus, hiszen (i, j)-edik eleme $/\frac{1}{2} \cdot (a_{ij} + a_{ji})/$ megegyezik (j, i)-edik elemével $/\frac{1}{2} \cdot (a_{ji} + a_{ij})/$.
Az $\frac{1}{2} \cdot \left(A - A^T\right)$ mátrix antiszimmetrikus, hiszen (i, j)-edik eleme $/\frac{1}{2} \cdot (a_{ij} - a_{ji})/$ a (j, i)-edik elem $/\frac{1}{2} \cdot (a_{ji} - a_{ij})/$ (-1)-szerese.
Így minden valós elemekből felépülő négyzetes mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére.

4. Legyen A egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyben a mellékátló alatt és felett mindenütt nullák találhatók. Jelölje d a mellékátlóbeli elemek szorzatát. Ekkor, az első sor szerinti kifejtéssel könnyen ellenőrizhetők az alábbiak:
   $n = 1$-re: $\det(A) = d$,
   $n = 2$-re: $\det(A) = -d$,
   $n = 3$-ra: $\det(A) = -d$,
   $n = 4$-re: $\det(A) = d$,
   $n = 5$-re: $\det(A) = d$,
   $n = 6$-ra: $\det(A) = -d$,
   $\vdots$

   Általában: $\det(A) = j \cdot d$, ahol
   $$j = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n = 4k \quad \text{vagy} \quad n = 4k+1 \quad \text{alakú}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{ha} \quad n = 4k+2 \quad \text{vagy} \quad n = 4k+3 \quad \text{alakú}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

5. Jelölje S_n az n-hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmazát. Ekkor $S_1 = \mathbb{Q}$, így S_1 megszámlálhatóan végtelen számosságú.

   $$S_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},$$

   így S_2 is megszámlálhatóan végtelen számosságú, hiszen két megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz Descartes-szorzata. Hasonlóan indokolható, hogy $S_n = \mathbb{Q}^n$ is megszámlálhatóan végtelen számosságú minden $n \in \mathbb{N}$-re. De ekkor az összes véges hosszú, racionális számokból álló sorozat halmaza, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n \cup \cdots$ is megszámlálhatóan végtelen számosságú, hiszen megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója.

6. Adjuk meg az $A \wedge B$ és $A \vee C$ formulák igazságtáblázatát az A, B, C változók függvényében:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee C$	F
i	i	i	i	i	
i	i	h	i	i	
i	h	i	h	i	
i	h	h	h	i	
h	i	i	h	i	
h	i	h	h	h	
h	h	i	h	i	
h	h	h	h	h	

   Kérdés: hogyan töltsük ki az utolsó oszlopban F logikai értékeit, hogy az $A \wedge F \equiv A \wedge B$ és az $A \vee F \equiv A \vee C$ összefüggések teljesüljenek?

   Az $A \wedge F \equiv A \wedge B$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy ha $A \wedge B$ igaz, akkor F is igaz kell legyen. Ha pedig $A \wedge B$ hamis és A igaz, akkor F hamis kell legyen. Ellenőrizhetjük, hogy ezekre az értékekre az $A \vee F \equiv A \vee C$ összefüggés teljesül.

   Ha A hamis, akkor a C változó logikai értékét kell F-nek adni, hogy az $A \vee F \equiv A \vee C$ összefüggés teljesüljön. Ezekben az esetekben az $A \wedge F \equiv A \wedge B$ összefüggés teljesül automatikusan.

Kapjuk tehát az alábbi táblázatot:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee C$	F	$A \wedge F$	$A \vee F$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	i	i	i
i	h	i	h	i	h	h	i
i	h	h	h	i	h	h	i
h	i	i	h	i	i	h	i
h	i	h	h	h	h	h	h
h	h	i	h	i	i	h	i
h	h	h	h	h	h	h	h

Így F igazságtáblája egyértelműen definiált, teljes diszjunktív normál forma alakja

$$F = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C).$$