Matematikai feladatmegoldó verseny 2009/10
1. forduló — megoldások

1. Mivel $n \geq 2$ esetén
$$\frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$
azt kapjuk, hogy
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\,n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$
Ezért
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

2. Indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n \geq 1$ -re $\sqrt{6} \leq a_n \leq 6$.
Mivel $a_1 = \sqrt{6}$, az állítás igaz $n = 1$-re. Most tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$-re $\sqrt{6} \leq a_n \leq 6$.
Ekkor
$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \geq \sqrt{6 + \sqrt{6}} \geq \sqrt{6},$$
és
$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6 + 6} = \sqrt{2 \cdot 6} \leq 6.$$
Ezzel az állítást igazoltuk minden $n \geq 1$-re. Szintén indukcióval bizonyítjuk, hogy minden $n \geq 1$-re $a_{n+1} > a_n$. Mivel
$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{6 + \sqrt{6}} > \sqrt{6} = a_1,$$
az állítás igaz $n = 1$-re. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$-re $a_{n+1} > a_n$. Ekkor
$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}.$$
Tehát az állítás igaz minden $n \geq 1$-re. Mivel az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton növekedő és korlátos, az
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$
határérték létezik és véges. Az
$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$
egyenlőségből határátmenet után kapjuk, hogy
$$a = \sqrt{6 + a}.$$
Innen
$$a^2 = 6 + a,$$
azaz $a = 3$ vagy $a = -2$. Mivel az $a_n \geq \sqrt{6}$ egyenlőtlenségből határátmenet után $a \geq \sqrt{6}$ adódik, ezért $a = 3$.

3. Az állítás nyilvánvalóan igaz akkor, ha az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok párhuzamosak: ekkor az $\underline{a}$ vektor vetülete és annak $\underline{x}$ elforgatottja nullvektor, továbbá az $\underline{e} \times \underline{a}$ vektoriális szorzat szintén nullvektor.

   Ha az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok nem párhuzamosak, akkor az $\underline{a}$ vektor vetületének ($\underline{a}'$) hossza:

$$\left|\underline{a}'\right| = |\underline{a}| \cdot \sin\varphi = |\underline{a}| \cdot |\underline{e}| \cdot \sin\varphi = |\underline{e} \times \underline{a}|\,,$$

   ahol φ az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok szöge. Így az elforgatással kapott $\underline{x}$ vektor hossza:

$$|\underline{x}| = |\underline{e} \times \underline{a}|\,.$$

   Az $\underline{x}$ vektor merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok síkjára, így az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok mindegyikére. Mivel az $\underline{a}'$ vetületvektort pozitív irányban forgattuk el $90°$-kal, így $\underline{e}$, $\underline{a}'$ és $\underline{x}$ jobbrendszert alkot és hasonlóan $\underline{e}$, $\underline{a}$ és $\underline{x}$ is jobbrendszert alkot. Következésképpen

$$\underline{x} = \underline{e} \times \underline{a}\,.$$

4. a) Mivel az A pont az S síkon van, így $A' = A$. Legyen e a C ponton átmenő, S-re merőleges egyenes, míg f a B ponton átmenő, S-re merőleges egyenes. Ekkor

$$\underline{v}_e = \underline{v}_f = \underline{n}_S = (2,\ 1,\ -3)\,,$$

   így a két egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$e: \begin{array}{rcrcl} x &=& 1 &+& 2t \\ y &=& 12 &+& t \\ z &=& -2 &-& 3t \end{array} \qquad\qquad f: \begin{array}{rcrcl} x &=& 6 &+& 2t \\ y &=& 4 &+& t \\ z &=& -6 &-& 3t \end{array}$$

   Az e egyenes és az S sík metszéspontja lesz a C pont vetülete: $C' = (-1,\ 11,\ 1)$, míg az f egyenes és az S sík metszéspontja a B pont vetülete: $B' = (2,2,0)$.
   Legyen ezután $\underline{a} = \overrightarrow{A'B'} = (-1,\ 5,\ 1)$ és $\underline{b} = \overrightarrow{A'C'} = (-4,\ 14,\ 2)$. Ekkor az $A'B'C'$ háromszög területe:

$$t = \frac{1}{2} \cdot |\underline{a} \times \underline{b}| = \frac{1}{2}\left|(-4,\ -2,\ 6)\right| = \frac{\sqrt{56}}{2} = \sqrt{14}.$$

   b) Legyen S' az A, B és C pontok által meghatározott sík. Legyen $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = (3,\ 7,\ -5)$ és $\underline{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,\ 15,\ -1)$.
   Ekkor az S'sík egy normálvektora: $\underline{n'} = \underline{u} \times \underline{v} = (68,\ 13,\ 59)$.
   Az S sík normálvektora: $\underline{n} = (2,\ 1,\ -3)$. Határozzuk meg a normálvektorok szögét!

$$\cos\varphi = \frac{\underline{n} \cdot \underline{n'}}{|\underline{n}| \cdot |\underline{n'}|} = \frac{-28}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{8274}} = -0,08227,$$

   így $\varphi = 94,7°$. Mivel $\varphi \succ 90°$, így a két sík szöge: $\alpha = 180° - \varphi = 85,3°$.

5. Legyen $x \in X$. Ekkor az $A \setminus X = B$ feltétel miatt $x \notin B$. Az $A \cup X = C$ feltétel miatt viszont $x \in C$. Ezért $x \in C \setminus B$, azaz $X \subseteq C \setminus B$.

   Fordítva, megmutatjuk, hogy $C \setminus B \subseteq X$. Legyen $y \in C \setminus B$, azaz $y \in C$ és $y \notin B$. Az $A \cup X = C$ feltétel miatt ekkor vagy $y \in A$ vagy $y \in X$. A második esetben készen vagyunk. Csak azzal az esettel kell tehát foglalkoznunk, amikor $y \in A$ és $y \notin X$. De ekkor $y \in A \setminus X$, és így az $A \setminus X = B$ feltétel miatt $y \in B$, ami ellentmond y választásának. Ez utóbbi eset tehát nem fordul elő.

   A két esetből következik, hogy $X = C \setminus B$.

6. a) Tegyük fel először, hogy φ injektív. Vegyünk olyan ψ és ζ leképezéseket, amelyekre $\psi\varphi = \zeta\varphi$ teljesül. Ekkor $a(\psi\varphi) = a(\zeta\varphi)$, azaz $(a\psi)\varphi = (a\zeta)\varphi$ is teljesül minden $a \in A$-ra. De ebből φ injektivitása miatt $a\psi = a\zeta$ is teljesül minden $a \in A$-ra, azaz $\psi = \zeta$.

   Fordítva, megmutatjuk, hogy ha φ nem injektív, akkor léteznek olyan $\psi, \zeta : C \to A$ leképezések, amelyre $\psi \neq \zeta$ és $\psi\varphi = \zeta\varphi$. Tegyük fel tehát, hogy φ nem injektív, azaz léteznek olyan $a_1 \neq a_2$ A-beli elemek, hogy $a_1\varphi = a_2\varphi$. Rögzítsünk egy $c_0 \in C$ elemet, és definiáljuk a

$$\psi\colon\ C \to A, \qquad x\psi = \begin{cases} a_1, & x \neq c_0, \\ a_2, & x = c_0 \end{cases}$$

és az

$$\zeta\colon\ C \to A, \qquad x\zeta = \begin{cases} a_2, & x \neq c_0, \\ a_1, & x = c_0 \end{cases}$$

leképezéseket. Ekkor $\psi \neq \zeta$ teljesül, viszont $c(\psi\varphi) = (c\psi)\varphi = (c\zeta)\varphi = c(\zeta\varphi)$ teljesül minden $c \in C$-re, így $\psi\varphi = \zeta\varphi$.

b) Tegyük fel, hogy φ szürjektív. Legyen ψ és ζ olyan, hogy $\varphi\psi = \varphi\zeta$. Legyen $b \in B$ tetszőleges. Ekkor φ szürjektivitása miatt létezik olyan $a \in A$, hogy $a\varphi = b$, ezért $b\psi = (a\varphi)\psi = a(\varphi\psi) = a(\varphi\zeta) = (a\varphi)\zeta = b\zeta$, így $\psi = \zeta$.

Fordítva, megmutatjuk, hogy ha φ nem szürjektív, akkor léteznek olyan $\psi, \zeta : B \to C$ leképezések, amelyre $\psi \neq \zeta$ és $\varphi\psi = \varphi\zeta$. Mivel φ nem szürjektív, létezik olyan $b_0 \in B$, amelyik nincs benne a φ értékkészletében. Legyen $b_1 \in B$ pedig egy tetszőlegesen rögzített elem φ értékkészletéből, és legyen $c_0 \neq c_1$ két C-beli elem. Definiáljuk a

$$\psi\colon\ B \to C, \qquad x\psi = \begin{cases} c_0, & x \neq b_0, \\ c_1, & x = b_0 \end{cases}$$

és az

$$\zeta\colon\ B \to C, \qquad x\zeta = c_0.$$

leképezéseket. Ekkor $\psi \neq \zeta$ teljesül, viszont $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi = c_0 = (a\varphi)\zeta = a(\varphi\zeta)$, azaz $\varphi\psi = \varphi\zeta$.