



PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2009/10

3. FORDULÓ

1. feladat:

Mutassa meg, hogy minden $x > 1$ esetén $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.

10 pont

2. feladat:

Adott egy háromszög alapja és magassága. Mikor lesz a terület minimális?

10 pont

3. feladat:

a) Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Mutassa meg, hogy az $A + A^T$ mátrix

szimmetrikus, míg az $A - A^T$ mátrix antiszimmetrikus!

(Egy $A_{n \times n}$ -es mátrixot antiszimmetrikusnak nevezünk, ha $a_{ij} = -a_{ji}$, minden $i, j = 1, \dots, n$ -re.)

b) Bontsa fel a fenti A mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére!

c) Igazolja, hogy minden valós elemekből felépülő négyzetes mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére!

10 pont

4. feladat:

Tudjuk, hogy a diagonális mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyenlő. Fogalmazzon meg hasonló állítást azon négyzetes mátrixok determinánsára, amelyekben a mellékátló alatt és felett mindenütt nullák találhatók! Igazolja is a megfogalmazott állítást!

Útmutatás:

Vizsgálja meg, hogy függ-e a determináns értéke a mátrix méretétől és a mellékátlóbeli elemektől, és ha igen, akkor hogyan!

10 pont

5. feladat:

Mutassa meg, hogy a racionális számokból álló véges hosszú sorozatok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú!

10 pont

6. feladat:

Adjon meg egy olyan $F = F(A, B, C)$ logikai formulát, amelyre

$$A \wedge F \equiv A \wedge B \quad \text{és} \quad A \vee F \equiv A \vee C$$

teljesül!

10 pont

Beadási határidő: 2009. december 7.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!