



PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2009/10

2. FORDULÓ

1. feladat:

Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

határértéket!

10 pont

2. feladat:

Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$$

határértéket!

10 pont

3. feladat:

Legyenek $\underline{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{a}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\underline{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$ és $\underline{a}_4 = (1, 0, 0, 0)$ $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok.

- Mutassa meg, hogy a fenti vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$ -ben!
- A fenti vektorok felhasználásával adjon meg egy 3 dimenziós és egy 1 dimenziós alteret úgy, hogy azok direkt összege $\mathbb{R}^4$ legyen!
- A fenti vektorok felhasználásával adjon meg egy 3 dimenziós és egy 2 dimenziós alteret úgy, hogy azok összege $\mathbb{R}^4$ legyen! Mutassa meg, hogy az $\underline{x} = (2, 6, 3, 2)$ vektor felbontása a két altérbe eső összetevőkre nem egyértelmű!

10 pont

4. feladat:

Az A négyzetes mátrixot idempotensnek nevezzük, ha $A^2 = A$ teljesül.

a) Mutassa meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix idempotens!

b) Igazolja, hogy ha az A és B $n \times n$ -es mátrixokra teljesül az $A \cdot B = A$ és $B \cdot A = B$ egyenlőség, akkor A is és B is idempotens!

10 pont

5. feladat:

Mutassa meg, hogy S_4 minden eleme előállítható az $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ és $(1\ 4)$ transzpozíciók szorzataként!

10 pont

6. feladat:

Legyen ρ az A halmazon definiált reláció. Mutassa meg, hogy ρ pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha $\omega_A \subseteq \rho$ és $\rho\rho^{-1} \subseteq \rho$.

10 pont

Beadási határidő: 2009. november 2.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!