



PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2009/10

1. FORDULÓ

1. feladat:

Számítsuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

határértéket .

10 pont

2. feladat:

Legyen $a_1 = \sqrt{6}$ és $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

10 pont

3. feladat:

Legyen $\underline{a}$ egy tetszőleges térbeli vektor, $\underline{e}$ pedig egy tetszőleges egységnyi hosszúságú térbeli vektor.

Vetítsük merőlegesen az $\underline{a}$ vektort az $\underline{e}$ -re merőleges S síkra, majd a vetületvektort az S síkon forgassuk el $\underline{e}$ irányából nézve pozitív irányban 90° -kal. Legyen az így kapott vektor $\underline{x}$. Mutassuk meg, hogy $\underline{x} = \underline{e} \times \underline{a}$!

10 pont

4. feladat:

Tekintsük a térben az $A = (3, -3, -1)$, $B = (6, 4, -6)$ és $C = (1, 12, -2)$ pontokat és az $S: 2x + y - 3z = 6$ síkot!

- a) Vetítsük merőlegesen az ABC háromszöget az S síkra! Mennyi az így kapott $A'B'C'$ vetület-háromszög területe?
- b) Mekkora az A, B és C pontok által meghatározott sík és az S sík szöge?

10 pont

5. feladat:

Adottak az A, B, C halmazok, amelyre $B \subseteq A \subseteq C$. Adjuk meg azt az X halmazt, amelyre

$$A \setminus X = B \quad \text{és} \quad A \cup X = C.$$

10 pont

6. feladat:

Tekintsünk egy $\varphi: A \rightarrow B$ leképezést! Bizonyítsuk be, hogy

- a) φ akkor és csak akkor injektív, ha valahányszor $\psi: C \rightarrow A$ és $\zeta: C \rightarrow A$ olyan leképezések, hogy $\psi\varphi = \zeta\varphi$, mindannyiszor $\psi = \zeta$.
- b) φ akkor és csak akkor szürjektív, ha valahányszor $\psi: B \rightarrow C$ és $\zeta: B \rightarrow C$ olyan leképezések, hogy $\varphi\psi = \varphi\zeta$, mindannyiszor $\psi = \zeta$.

10 pont

Beadási határidő: 2009. október 5.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!