# Matematikai feladatmegoldó verseny 2008/09
# 6. forduló — megoldások

1. A
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!}$$
és a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y, \qquad y \in \mathbb{R}$$
azonosságok alapján
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n!} = \frac{1}{4} e^{x^4}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2. A $D$ halmaz korlátos és zárt, ezért Weierstrass tétele szerint mindkét szélsőérték létezik. Mivel
$$D_1 f(x,y) = 2x, \qquad D_2 f(x,y) = -2y,$$
$f$ egyetlen kritikus pontja $D$ belsejében a $(0,0)$ pont, ahol $f(0,0) = 0$. Ezért a szélsőértékeit $f$ vagy a $(0,0)$ pontban vagy pedig $D$ határán – az $x^2+y^2=4$ körvonal pontjaiban veszi fel. Az $x^2+y^2=4$ körvonalon
$$f(x,y) = x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 2y^2 = 4 - 2y^2 \le 4,$$
és egyenlőség $y = 0$-ra, azaz a $(2,0)$ és $(-2,0)$ pontokban teljesül. Tehát $f$ legnagyobb értéke 4. Mivel az $x^2+y^2=4$ feltételből $|y| \le 2$ következik, a körvonalon
$$f(x,y) = 4 - 2y^2 \ge 4 - 2 \cdot 2^2 = -4,$$
miközben egyenlőség $y = +2$-re és $y = -2$-re, azaz a $(0,2)$ és $(0,-2)$ pontokban teljesül. Ezért $f$ legkisebb értéke $-4$.

3. Vegyük észre, hogy
$$\int_0^1 \left( \int_0^y e^{-(x-1)^2} dx \right) dy = \iint_H e^{-(x-1)^2} dx dy,$$
ahol
$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y \right\}.$$
A kettős integrál létezik, mert az integrandus folytonos. Mivel a $H$ halmaz a
$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \right\}$$
alakban is írható, azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned} \iint_H e^{-(x-1)^2} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_x^1 e^{-(x-1)^2} dy \right) dx = \\ &= -\int_0^1 (x-1) e^{-(x-1)^2} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{-(x-1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$
Tehát az integrál értéke $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

4. A $G$ gráfból kiindulva készítsünk egy $G'$ gráfot, úgy, hogy a $G$ gráfban megkettőzünk minden élet. Ekkor a $G'$ is összefüggő gráf lesz, és $G'$-ben minden pont fokszáma páros lesz. Így $G'$-ben létezik zárt Euler-vonal. Ebben a zárt sétában a hozzáadott éleket azonosítva az eredeti élekkel egy olyan zárt sétát kapunk, amely mentén a $G$ gráf minden élét kétszer bejárva mehetünk végig.

5. Jelölje $n_1, \ldots, n_k$ az egyes komponensek csúcspontjainak számát. Ekkor az egyes komponensek pontosan akkor tartalmaznak legkevesebb élet, ha azok fák. De ekkor a gráf éleinek száma

$$n_1 - 1 + \cdots + n_k - 1 = n_1 + \cdots + n_k - k = n - k.$$

Ezzel az alsó becslést beláttuk.

A felső becslés igazolásához először vegyük észre, hogy az $n_1, \ldots, n_k$ pontokból álló komponensekben akkor van a legtöbb él, ha minden komponens teljes gráf. Könnyen igazolható, hogy ha $n_i \geq 2$ és $n_j \geq 2$, akkor teljesül az

$$\frac{n_i(n_i-1)}{2} + \frac{n_j(n_j-1)}{2} < \frac{(n_i+n_j-1)(n_i+n_j-2)}{2}$$

egyenlőtlenség. Ez viszont azt jelenti, hogy az $n_i$ és $n_j$ pontokból álló teljes gráf élei számának összege kisebb, mint az 1 pontból álló gráf (nincs benne él) és az $n_i + n_j - 1$ pontból álló teljes gráf éleinek összege. Azaz, akkor kapjuk a legtöbb élet, ha $k-1$ db izolált pont és egy $n-k+1$ pontból álló teljes gráf alkotja a $k$ db komponenst. Egy $n-k+1$ pontból álló teljes gráf éleinek száma pedig

$$\binom{n-k+1}{2}.$$

6. Mivel $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ alakú (ahol $\lambda_1 = 4+\sqrt{15}$ és $\lambda_2 = 4-\sqrt{15}$), ezért $a_n$ megoldása egy másodfokú homogén, konstans együtthatós differenciaegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - 8\lambda + 1.$$

Ezért $a_n$ teljesíti az

$$a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$$

differenciaegyenletet. Mivel

$$a_0 = 65 \qquad \text{és} \qquad a_1 = 10,$$

azért a rekurzió miatt $a_n$ minden $n$-re egész szám lesz, és osztható 5-tel.