

Analízis I. feladatgyűjtemény

Dr.Koltay László és Dr.Szalkai István
Pannon Egyetem

2008.08.23.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
I Feladatok	3
12 Kétváltozós integrál	5
12.1 Elemi feladatok	5
12.2 Transzformációk	7
II Útmutatások	9
12 Kétváltozós integrál	11
12.1 Elemi feladatok	11
12.2 Transzformációk	12
III Megoldások	15
12 Kétváltozós integrál	17
12.1 Elemi feladatok	17
12.2 Transzformációk	24

wwwAnalFgy2-12(ketint)b.tex, 2008.08.23., 18:53'

= szerkesztés alatt, hiányos,

∇ = van útmutatás,

◆ = van részletes megoldás,

+ = érdekes

! = tanulságos feladat,

* = nehezebb, becsapós feladat,

+ = felhasználható, érdekes feladat,

⊙ = kiegészítés, megjegyzés, érdekesség,

Rész I

Feladatok

Fejezet 12

Kétváltozós integrál

12.1 Elemi feladatok

12.1.∇) Számítsuk ki az alábbi *szyukcesszív*¹⁾ (ismételt) integrálokat:

a♦) $\int_3^7 \left(\int_4^5 x^2 + y^3 dx \right) dy, \quad \int_1^2 \left(\int_8^9 x^5 y^3 dy \right) dx,$

b♦) $\int_H f$ ahol $f(x, y) = x/y$ és H az $A(2, 3), B(2, 5), C(6, 5), D(6, 3)$ pontok által határolt téglalap.

c) $\int_{[1,2] \times [0,3]} (2x^2 + 3xy + 4y^2) dx dy.$

12.2.∇♦) Számítsa ki az alábbi $\int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy dx$ integrálokat, ahol

a) $u(x) = x^2 - 2x - 4, v(x) = 3x^2 + 8x, f(x, y) = 3x^2 + 8y^2 - xy,$
 $a = -6.83, b = 8.49,$

b) $u(x) = x^2 + x - 4, v(x) = 3\sqrt{x} + 8x, f(x, y) = x^2 + xy, a = 3, b = 9.$

12.3.∇) Számítsa ki az alábbi $\int_H f$ integrálokat, ahol a H tartományt alulról és felülről a g és h függvénygörbék határolják:

a♦) $f(x, y) = x + y, \quad g(x) = x^2 + 2x, \quad h(x) = 4 - x^2,$

b♦) $f(x, y) = 2y, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x + 2,$

¹⁾ egymás utáni (lat.)

c) $f(x, y) = y \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = 2 \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

12.4. ▽) Számítsa ki az alábbi $\int \int_H f$ integrálokat. (Minden esetben rajzolja fel a H tartományt is. Ahol lehet, számítsa ki az integrált mind függőlegesen, mind vízszintesen is.)

a♦) $f(x, y) = x^2 + y + 1$, H -t az x -tengely, y -tengely és az $x + 2y = 1$ egyenes határolják,

b♦) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ és $H = \{(x, y) : x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$,

c) $f(x, y) = xy$ és H a koordinátatengelyek és az $y = 1 - x$ egyenes által bezárt korlátos halmaz,

d!♦) $f(x, y) = x^2 + y^3$, $H = ABC\Delta =$ az $A(3, 2)$, $B(5, 8)$ és $C(9, 4)$ pontok által meghatározott háromszög.

e♦) $f(x, y) = yx$ és $H =$ az $(1, 0)$ középpű egységsugarú kör x tengely feletti fele,

f₁♦) $f(x, y) = y$ és $H =$ origó középpű egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

f₂) $f(x, y) = 1 + 2xy$ és H az $y = \sqrt{x}$, $y = 2x - 1$ és $x = 0$ görbék által határolt korlátos halmaz.

f₃) $f(x, y) = xe^y$ és H -t az $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ és $y = 4 - 2x$ egyenesek határolják,

12.5. ▽♦) Adja meg a H tartományt az alábbi feladatokban:

a) $\int_1^3 \int_1^{4x-x^2} f(x, y) dy dx$,

b) $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{1/2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$,

c) $\int_0^2 \int_y^{1+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx dy$,

12.6. ▽) Cserélje fel az integrálás sorrendjét (azaz vízszintes és függőleges irányát) az alábbi feladatokban:

a♦) $\int_0^{1.5} \int_0^{3-y/2} f(x, y) dx dy$, $\int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy$, $\int_1^3 \int_1^{4x-x^2} f(x, y) dy dx$,

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy, \quad \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy,$$

$$\mathbf{b}^* \blacklozenge) \int_0^3 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx + \int_3^4 \int_{2x-6}^{x^2} f(x, y) dy dx,$$

c) a 12.5) feladatban szereplő integrálokban.

12.7. $\nabla \blacklozenge$) Számítsa ki az alábbi $\int_H \int f$ integrált:

a) $f(x, y) = e^{x^2}$, H -t az x -tengely, az $y = x$ és az $x = 1$ egyenesek határolják.

12.2 Transzformációk

12.8. ∇) Számítsuk ki az alábbi $\int_H \int f$ integrálokat polártranszformáció segítségével, ahol:

$\mathbf{a} \blacklozenge$) $f(x, y) = y$ és $H =$ origó közepű egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

$\mathbf{b} \blacklozenge$) $f(x, y) = yx$ és $H =$ az $(1, 0)$ közepű egységsugarú kör x tengely feletti fele,

$$\mathbf{c}_1) f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \text{ és } H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > -x\},$$

$$\mathbf{c}_2) f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \text{ és } H = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$\mathbf{c}_3) f(x, y) = x^3 - 2xy \text{ és } H = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\},$$

$$\mathbf{d}) f(x, y) = 3x + y \text{ és } H = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\},$$

12.9. ∇) Számítsuk ki az alábbi $\int_H \int f$ integrálokat *lineáris* transzformáció segítségével, ahol:

$\mathbf{a} \blacklozenge$) $f(x, y) = x^2 - y^2$ és $H =$ az $A(0, 0)$, $B(3, 1)$, $C(5, 4)$, $D(2, 3)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

$\mathbf{b}$) $f(x, y) = xy$ és $H =$ az $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(1, 3)$, $D(2, 1)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

$\mathbf{c}$) $f(x, y) = x + y$ és $H =$ az $A(-2, 0)$, $B(0, 3)$, $C(2, 0)$, $D(0, -3)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

12.10.∇) Számítsuk ki az alábbi $\int \int_H f$ integrálokat egyéb transzformáció segítségével, ahol:

a♦) $f(x, y) = y/x$, $H =$ az $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = x$ és $y = 2x$ görbék által meghatározott korlátos síkrész,

b) $f(x, y) = 1$, $H =$ az $y = x^2/2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{x}$ és $y = \frac{4}{x}$ görbék által meghatározott korlátos síkrész.

Rész II

Útmutatások

Fejezet 12

Kétváltozós integrál

12.1 Elemi feladatok

12.1.) Amennyiben H az $x = a$, $x = b$, $y = c$ és $y = d$ egyenesek által határolt téglalap, akkor:

”vízszintes” integrálás esetén

$$\int_H \int f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d (F_x(b, y) - F_x(a, y)) dy = G(d) - G(c)$$

ahol $F_x(x, y)$ az $f(x, y)$ függvény x szerinti primitív függvénye, azaz

$$\frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y) = f(x, y) \quad ((x, y) \in \text{Dom}(f))$$

és $G(y)$ az $F_x(b, y) - F_x(a, y)$ egyváltozós függvény primitív függvénye;

”függőleges” integrálás esetén

$$\int_H \int f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (F_y(x, d) - F_y(x, c)) dx = H(b) - H(a)$$

ahol $F_y(x, y)$ az $f(x, y)$ függvény y szerinti primitív függvénye, azaz

$$\frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y) = f(x, y) \quad ((x, y) \in \text{Dom}(f))$$

és $H(x)$ az $F_y(x, d) - F_y(x, c)$ egyváltozós függvény primitív függvénye.

Fubini tétele szerint a fenti két számítási módszer egyenértékű (ugyanazt az eredményt adja). A gyakorlatban sok esetben az egyik irány kiszámolható, a másik nem, ezért érdemes mindkét irányt megtanulnunk.

12.2. Használjuk az előző feladatban ismertetett szukcesszív integrálás alábbi, *általánosított* képletét:

$$\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (F_y(x, v(x)) - F_y(x, u(x))) dx = K(b) - K(a)$$

ahol $K(x)$ az $F_y(x, v(x)) - F_y(x, u(x))$ egyváltozós függvény primitív függvénye.

12.3. Először számítsa ki a g és h függvénygörbék metszéspontjait, majd állapítsa meg, hogy g és h közül melyik alkotja H alsó- és felső határát, végül számoljon a 12.2. feladatok mintájára.

12.4.d) Az $ABC\triangle$ oldalegyeneseihez használhatja az alábbi képletet: az $U(u_1, u_2)$, $V(v_1, v_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete

$$(x - v_1)(u_2 - v_2) = (u_1 - v_1)(y - v_2) \quad . \quad \square$$

12.5. Minden esetben készítsen ábrát a H halmazról!

12.6. Készítsen ábrát a H halmazról!

12.7. Néhány feladatban az integrál csak egyik irányban lehetséges (vagy függőlegesen, vagy vízszintesen.)

12.2 Transzformációk

ÁLTALÁBAN a transzformációkról:

Az $\int_H \int f(x, y) dx dy$ integrálban az $x = u(k, \ell)$, $y = v(k, \ell)$ helyettesítést alkalmazva a $J : (k, \ell) \mapsto (x, y)$, pontosabban a $J(k, \ell) = (u(k, \ell), v(k, \ell))$ függvény determinánsára (ún. Jacobi -determináns) van szükségünk:

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial k} u(k, \ell) & \frac{\partial}{\partial \ell} u(k, \ell) \\ \frac{\partial}{\partial k} v(k, \ell) & \frac{\partial}{\partial \ell} v(k, \ell) \end{vmatrix}$$

ami alapján

$$\int_H \int f(x, y) dx dy = \int_M \int f(u(k, \ell), v(k, \ell)) \cdot \det(J) dk d\ell$$

ahol $J''M = H$ (vagyis $\text{Dom}(J) = M$ és $\text{Im}(J) = H$).

12.8. Az

$$x = r \cdot \cos(\varphi) + u_0, \quad y = r \cdot \sin(\varphi) + v_0$$

helyettesítést hívjuk **polártranszformációnak**. Ekkor a helyettesítés determinánsa

$$J(r, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} = r. \quad \square$$

A polártranszformációt legtöbbször kör alakú H tartományok esetén használjuk, ahol (u_0, v_0) = a kör középpontja.

Ellipszis alakú H tartomány esetén a fenti transzformáció

$$x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi) + u_0, \quad y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi) + v_0$$

változatát, az ún. **Yvory transzformációt** használjuk, melynek determinánsa

$$Y(r, \varphi) = \det \begin{bmatrix} a \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot a \cdot \sin(\varphi) \\ b \cdot \sin(\varphi) & r \cdot b \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} = r \cdot a \cdot b. \quad \square$$

12.9. Ha a H tartomány paralelogramma alakú, vagyis az $\vec{u} = (a_1, b_1)$ és $\vec{v} = (a_2, b_2)$ vektorok feszítik ki, kezdőcsúcsa $A(c_1, c_2)$, akkor az

$$x = a_1 k + b_1 \ell + c_1, \quad y = a_2 k + b_2 \ell + c_2 \quad (0 \leq k, \ell \leq 1)$$

helyettesítést alkalmazzuk¹⁾, amit **lineáris transzformáció**nak hívunk. Ekkor a helyettesítés determinánsa

$$\det(J(k, \ell)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 . \quad \square$$

12.10. Általában, ha a H tartományt az $y = k_1 \cdot \varphi(x)$, $y = k_2 \cdot \varphi(x)$ illetve az $y = \ell_1 \cdot \psi(x)$, $y = \ell_2 \cdot \psi(x)$ görbék zárják közre, akkor H minden $P(x, y)$ pontja az $y = k \cdot \varphi(x)$ és $y = \ell \cdot \psi(x)$ görbék metszéspontjaként megkapható ($k_1 \leq k \leq k_2$, $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$), ami alapján felírhatunk egy $J : (k, \ell) \mapsto (x, y)$ transzformációt.

a) $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$. Az $y = \frac{k}{x}$ és $y = \ell x$ görbék $P(x, y)$ metszéspontját az $y = \frac{k}{x} = \ell x$ egyenletrendszer megoldásából kapjuk, vagyis $P(x, y) = \left(\sqrt{\frac{k}{\ell}}, \sqrt{k\ell} \right)$. Tehát a

$$J : (k, \ell) \mapsto \left(\sqrt{\frac{k}{\ell}}, \sqrt{k\ell} \right)$$

helyettesítést (transzformációt) kell alkalmaznunk, aminek determinánsa

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{k\ell}} & \frac{-1}{2\ell} \sqrt{\frac{k}{\ell}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{k}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\ell}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\ell}$$

hiszen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} u(k, \ell) &= \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{\frac{k}{\ell}} = \frac{1}{2\ell \sqrt{\frac{k}{\ell}}} = \frac{1}{2\sqrt{k\ell}}, \\ \frac{\partial}{\partial \ell} u(k, \ell) &= \frac{\partial}{\partial \ell} \sqrt{\frac{k}{\ell}} = \frac{-1}{2} \sqrt{k} \ell^{-3/2} = \frac{-1}{2\ell} \sqrt{\frac{k}{\ell}} \end{aligned}$$

és

$$\frac{\partial}{\partial k} v(k, \ell) = \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{k\ell} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{k}}, \quad \frac{\partial}{\partial \ell} v(k, \ell) = \frac{\partial}{\partial \ell} \sqrt{k\ell} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\ell}}.$$

¹⁾ ugyanis ekkor a paralelogramma minden pontjára $P(x, y) = A + k \vec{u} + \ell \vec{v}$ ahol $0 \leq k, \ell \leq 1$.

Rész III

Megoldások

Fejezet 12

Kétváltozós integrál

12.1 Elemi feladatok

12.1.a₁) Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int x^2 + y^3 dx = \frac{1}{3}x^3 + y^3x + C ,$$

$$\int_4^5 x^2 + y^3 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + y^3x \right]_{x=4}^{x=5} = \left(\frac{1}{3}5^3 + y^35 \right) - \left(\frac{1}{3}4^3 + y^34 \right) = \frac{61}{3} + y^3 ,$$

ezután $\int \frac{61}{3} + y^3 dy = \frac{61}{3}y + \frac{1}{4}y^4 + C ,$

végül $\int_H \int f = \int_3^7 \frac{61}{3} + y^3 dy = \left[\frac{61}{3}y + \frac{1}{4}y^4 \right]_{y=3}^{y=7} =$
 $= \left(\frac{61}{3} \cdot 7 + \frac{1}{4}7^4 \right) - \left(\frac{61}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4}3^4 \right) \approx 661.333\dot{3}$

a₂) Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int x^5 y^3 dy = x^5 \frac{1}{4} y^4 + C ,$$

$$\int_8^9 x^5 y^3 dy = x^5 \frac{1}{4} [y^4]_{y=8}^{y=9} = x^5 \frac{1}{4} (9^4 - 8^4) = \frac{2465}{4} x^5 ,$$

ezután $\int \frac{2465}{4} x^5 dx = \frac{2465}{4} \cdot \frac{1}{6} x^6 + C = \frac{2465}{24} x^6 + C ,$

végül $\int_H \int f = \int_1^2 \frac{2465}{4} x^5 dx = \frac{2465}{24} [x^6]_{x=1}^{x=2} = \frac{2465}{24} (2^6 - 1) = 6470.625.$

b) "Függőlegesen" integrálva: $\int_H \int f = \int_2^6 \left(\int_3^5 \frac{x}{y} dy \right) dx .$

Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int \frac{x}{y} dy = x \int \frac{1}{y} dy = x \ln |y| + C ,$$

$$\int_3^5 \frac{x}{y} dy = x [\ln |y|]_{y=3}^{y=5} = x (\ln(5) - \ln(3)) = x \ln\left(\frac{5}{3}\right) ,$$

$$\text{ezután } \int x \ln\left(\frac{5}{3}\right) dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} x^2 + C , \quad \text{végül}$$

$$\int_H \int f = \int_2^6 x \ln\left(\frac{5}{3}\right) dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \left[\frac{1}{2} x^2\right]_2^6 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} (6^2 - 2^2) \approx 8.1732 .$$

”Vízszintesen” integrálva: $\int_H \int f = \int_3^5 \left(\int_2^6 \frac{x}{y} dx \right) dy .$

Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int \frac{x}{y} dx = \frac{1}{y} \int x dy = \frac{1}{2y} x^2 + C ,$$

$$\int_2^6 \frac{x}{y} dy = \frac{1}{2y} [x^2]_{x=2}^{x=6} = \frac{1}{2y} (6^2 - 2^2) = \frac{16}{y} ,$$

$$\text{ezután } \int \frac{16}{y} dy = 16 \ln |y| + C , \quad \text{végül}$$

$$\int_H \int f = \int_3^5 \frac{16}{y} dy = 16 [\ln |y|]_3^5 = 16 (\ln(5) - \ln(3)) \approx 8.1732 .$$

12.2.a) Először

$$\begin{aligned} & \int_{x^2-2x-4}^{3x^2+8x} (3x^2 + 8y^2 - xy) dy = \left[3x^2 y + \frac{8}{3} y^3 - \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x^2-2x-4}^{y=3x^2+8x} = \\ & = \left(3x^2 (3x^2 + 8x) + \frac{8}{3} (3x^2 + 8x)^3 - \frac{1}{2} x (3x^2 + 8x)^2 \right) - \\ & \quad - \left(3x^2 (x^2 - 2x - 4) + \frac{8}{3} (x^2 - 2x - 4)^3 - \frac{1}{2} x (x^2 - 2x - 4)^2 \right) = \\ & = \frac{208}{3} x^6 + 588x^5 + 1516x^4 + \frac{3764}{3} x^3 + 20x^2 + 264x + \frac{512}{3} , \end{aligned}$$

másodszor

$$\begin{aligned} & \int_{-6.83}^{8.49} \left(\frac{208}{3} x^6 + 588x^5 + 1516x^4 + \frac{3764}{3} x^3 + 20x^2 + 264x + \frac{512}{3} \right) dx = \\ & = \left[\frac{208}{21} x^7 + 98x^6 + \frac{1516}{5} x^5 + \frac{941}{3} x^4 + \frac{20}{3} x^3 + 132x^2 + \frac{512}{3} x \right]_{x=-6.83}^{x=8.49} = \\ & = \left(\frac{208}{21} \cdot 8.49^7 + 98 \cdot 8.49^6 + \frac{1516}{5} \cdot 8.49^5 + \frac{941}{3} \cdot 8.49^4 + \frac{20}{3} \cdot 8.49^3 + \right. \\ & \quad \left. + 132 \cdot 8.49^2 + \frac{512}{3} \cdot 8.49 \right) - \\ & \quad - \left(\frac{208}{21} \cdot (-6.83)^7 + 98 \cdot (-6.83)^6 + \frac{1516}{5} \cdot (-6.83)^5 + \frac{941}{3} \cdot (-6.83)^4 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{20}{3} \cdot (-6.83)^3 + 132 \cdot (-6.83)^2 + \frac{512}{3} \cdot (-6.83) \right) \approx \end{aligned}$$

$$\approx 8.3951 \times 10^7 .$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \int_{x^2+x-4}^{3\sqrt{x}+8x} (x^2 + xy) dy = \left[x^2 y + \frac{1}{2} x y^2 \right]_{y=x^2+x-4}^{y=3\sqrt{x}+8x} = \\ & = \left(x^2 (3\sqrt{x} + 8x) + \frac{1}{2} x (3\sqrt{x} + 8x)^2 \right) - \left(x^2 (x^2 + x - 4) + \frac{1}{2} x (x^2 + x - 4)^2 \right) = \\ & = -\frac{1}{2} x^5 - 2x^4 + \frac{85}{2} x^3 + \frac{25}{2} x^2 - 8x + 27 (\sqrt{x})^5 , \\ & \int_H \int f = \int_3^9 \left(-\frac{1}{2} x^5 - 2x^4 + \frac{85}{2} x^3 + \frac{25}{2} x^2 - 8x + 27 (\sqrt{x})^5 \right) dx = \\ & = \left[\frac{54}{7} (\sqrt{x})^7 + \frac{85}{8} x^4 + \frac{25}{6} x^3 - \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{12} x^6 - 4x^2 \right]_3^9 = \\ & = -\frac{1458}{7} \sqrt{3} + \frac{721341}{35} \approx 20248.9814 . \end{aligned}$$

12.3.a) g és h metszéspontjai pontosan a $g(x) = h(x)$ azaz az $x^2 + 2x = 4 - x^2$ egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.
A $[-2, 1]$ intervallumon $x^2 + 2x \leq 4 - x^2$, tehát

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2x}^{4-x^2} (x+y) dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left([xy + y^2/2]_{y=x^2+2x}^{y=4-x^2} \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left(x(4-x^2) + (4-x^2)^2/2 - x(x^2+2x) - (x^2+2x)^2/2 \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (-4x^3 - 8x^2 + 4x + 8) dx = [-x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 8x]_{-2}^1 = \\ &= (-1 - \frac{8}{3} + 2 + 8) - (-(-2)^4 - \frac{8}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 + 8(-2)) = 9 . \end{aligned}$$

b) g és h metszéspontjai: az $x^2 = x + 2$ egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. A $[-1, 2]$ intervallumon $x^2 \leq x + 2$, tehát

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 2y dy \right) dx = \int_{-1}^2 \left([y^2]_{y=x^2}^{y=x+2} \right) dx = \int_{-1}^2 ((x+2)^2 - x^4) dx = \\ &= \int_{-1}^2 (-x^4 + x^2 + 4x + 4) dx = [-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x]_{-1}^2 = \frac{72}{5} . \end{aligned}$$

12.4.a) Függőlegesen: $\int_H \int f = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=1/2-x/2} (x^2 + y + 1) dy \right) dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y \right]_{y=0}^{y=1/2-x/2} dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) - 0 \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} x^3 + \frac{5}{8} x^2 - \frac{3}{4} x + \frac{5}{8} \right) dx = \left[-\frac{1}{8} x^4 + \frac{5}{24} x^3 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{8} x \right]_0^1 = \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{5}{24} - \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - 0 = \frac{1}{3} .
\end{aligned}$$

Vízszintesen:

$$\begin{aligned}
\int_H \int f &= \int_0^{1/2} \left(\int_{x=0}^{x=1-2y} (x^2 + y + 1) dx \right) dy = \int_0^{1/2} \left(\left[\frac{1}{3} x^3 + yx + x \right]_{x=0}^{x=1-2y} \right) dy = \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{3} (1-2y)^3 + y(1-2y) + (1-2y) - 0 \right) dy = \int_0^{1/2} \left(-\frac{8}{3} y^3 + 2y^2 - 3y + \frac{4}{3} \right) dy = \\
&= \left[-\frac{2}{3} y^4 + \frac{2}{3} y^3 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{4}{3} y \right]_0^{1/2} = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{1}{3} .
\end{aligned}$$

12.4.b) Függőlegesen: $\int_H \int f = \int_0^1 \left(\int_{y=x}^{y=1} \sqrt{1-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^2} \right]_{y=x}^{y=1} dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2} dx = \\
&= \left[\frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \arcsin(x)) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \\
&= \left(\frac{1}{2} \arcsin(1) + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \arcsin(1)) - 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (0-1) = \\
&= \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521
\end{aligned}$$

mivel a 9.13c₁) feladat) szerint

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \arcsin(x)) + C .$$

Vízszintesen: $\int_H \int f = \int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=y} \sqrt{1-x^2} dx \right) dy =$

ismét a 9.13c₁) feladat) szerint:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \arcsin(x)) \right]_{x=0}^{x=y} dy = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \arcsin(y) + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \arcsin(y)) - 0 \right) dy = \quad (\boxtimes)
\end{aligned}$$

$$\text{ahol } \frac{1}{2} \int \arcsin(y) dy = \frac{1}{2} \left(y \cdot \arcsin(y) + \sqrt{1-y^2} \right) \quad / \text{I.típ.hely.}/$$

$$\text{és } \sin(2 \cdot \arcsin(y)) = 2y\sqrt{1-y^2} \quad \text{miatt}$$

$$\frac{1}{4} \int 2y\sqrt{1-y^2} dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{3} (1-y^2)^{3/2} \quad / \text{I.típ.hely.}/$$

TEHÁT

$$\begin{aligned} (\boxtimes) &= \left[\frac{1}{2} \left(y \cdot \arcsin(y) + \sqrt{1-y^2} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{3} (1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{1}{2} (\arcsin(1) + 0) + 0 \right) - \left(\frac{1}{2} (0 + 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521 . \end{aligned}$$

12.4.d)

$$a = BC \text{ egyenes egyenlete } (x-5)(4-8) = (9-5)(y-8)$$

$$\text{azaz } y = -x + 13 \quad \text{vagy} \quad x = -y + 13 ,$$

$$b = AC \text{ egyenes egyenlete } (x-3)(4-2) = (9-3)(y-2)$$

$$\text{azaz } y = \frac{1}{3}x + 1 \quad \text{vagy} \quad x = 3y - 3 ,$$

$$c = AB \text{ egyenes egyenlete } (x-3)(8-2) = (5-3)(y-2)$$

$$\text{azaz } y = 3x - 7 \quad \text{vagy} \quad x = \frac{1}{3}y + \frac{7}{3} .$$

"Függőlegesen" integrálva ($x = 5$ -nél el kell vágnunk):

$$\int_H \int f = \int_3^5 \left(\int_{y=b}^{y=c} f(x,y) dy \right) dx + \int_5^9 \left(\int_{y=b}^{y=a} f(x,y) dy \right) dx ,$$

$$\text{az első tényező } \int_3^5 \left(\int_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=3x-7} (x^2 + y^3) dy \right) dx = \int_3^5 \left([x^2 y + \frac{1}{4} y^4]_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=3x-7} \right) dx =$$

$$= \int_3^5 \left(x^2 (3x-7) + \frac{1}{4} (3x-7)^4 - x^2 \left(\frac{1}{3}x+1 \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x+1 \right)^4 \right) dx =$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{1640}{81} x^4 - \frac{5032}{27} x^3 + \frac{1960}{3} x^2 - \frac{3088}{3} x + 600 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{328}{81} x^5 - \frac{1258}{27} x^4 + \frac{1960}{9} x^3 - \frac{1544}{3} x^2 + 600x \right]_{x=3}^{x=5} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{328}{81} \cdot 5^5 - \frac{1258}{27} \cdot 5^4 + \frac{1960}{9} \cdot 5^3 - \frac{1544}{3} \cdot 5^2 + 600 \cdot 5 \right) - \\ &\quad - \left(\frac{328}{81} \cdot 3^5 - \frac{1258}{27} \cdot 3^4 + \frac{1960}{9} \cdot 3^3 - \frac{1544}{3} \cdot 3^2 + 600 \cdot 3 \right) = \frac{51152}{81} \approx 631.5062, \end{aligned}$$

$$\text{a második tényező } = \int_5^9 \left(\int_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=-x+13} (x^2 + y^3) dy \right) dx = \int_5^9 \left([x^2 y + \frac{1}{4} y^4]_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=-x+13} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_5^9 \left(x^2(-x+13) + \frac{1}{4}(-x+13)^4 - x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+1\right)^4 \right) dx = \\
&= \int_5^9 \left(\frac{20}{81}x^4 - \frac{388}{27}x^3 + \frac{796}{3}x^2 - \frac{6592}{3}x + 7140 \right) dx = \\
&= \left[\frac{4}{81}x^5 - \frac{97}{27}x^4 + \frac{796}{9}x^3 - \frac{3296}{3}x^2 + 7140x \right]_{x=5}^{x=9} = \\
&= \left(\frac{4}{81} \cdot 9^5 - \frac{97}{27} \cdot 9^4 + \frac{796}{9} \cdot 9^3 - \frac{3296}{3} \cdot 9^2 + 7140 \cdot 9 \right) - \\
&\quad - \left(\frac{4}{81} \cdot 5^5 - \frac{97}{27} \cdot 5^4 + \frac{796}{9} \cdot 5^3 - \frac{3296}{3} \cdot 5^2 + 7140 \cdot 5 \right) = \frac{153184}{81} \approx 1891.1605,
\end{aligned}$$

tehát

$$\iint_H f = \frac{51152}{81} + \frac{153184}{81} = \frac{7568}{3} \approx 2522.6667.$$

”Vízszintes” integrálás esetén $y = 4$ -nél kell elvágni:

$$\iint_H f = \int_2^4 \left(\int_{x=c}^{x=b} f(x,y) dx \right) dy + \int_4^8 \left(\int_{x=c}^{x=a} f(x,y) dx \right) dy = \dots = \frac{7568}{3}. \quad \square$$

12.4.e) H képlete: $H = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y\}$, ezért

$$\begin{aligned}
\iint_H f &= \iint_H yx \, dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y \cdot x \, dy \right) dx = \int_0^2 x \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 x (1 - (x-1)^2 - 0) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 0 \right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(Lásd még a 12.8.b) feladat megoldását is.)

12.4.f₁) H képlete: $H = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$, ezért

”Függőlegesen” integrálva:

$$\begin{aligned}
\iint_H f &= \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 - x^2 \, dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

”Vízszintesen” integrálva:

$$\iint_H f = \int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} y \, dx \right) dy = \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{-1}{2} \int_0^1 -2y (1-y^2)^{1/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(1 - y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{1}{3}.$$

(Lásd még a 12.8.a) feladat megoldását is)

12.5.

a) $H = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 4x - x^2, 1 \leq x \leq 3\}$, tehát H -t az $y = 4x - x^2$ parabola és az $x = 1$, $x = 3$ és $y = 1$ egyenesek határolják.

b) $H = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, tehát H -t az $x^2 + y^2 = 1$ körnek az $x = \frac{1}{2}$ egyenestől jobbra eső szeletének az $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ és $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenesek közötti darabja alkotja. Mivel azonban ez utóbbi egyenesek éppen a körszelet "csúcsain" haladnak át, nincs is szerepük H határolásában.

Ez azt jelenti, hogy H pontosan az origó középpontú, egysugarú körből az $x = \frac{1}{2}$ egyenes által levágott kisebbik körszelet.

c) $H = \{(x, y) : y \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y}, 0 \leq y \leq 2\}$. Mivel azonban $1 < y$ esetén a $\sqrt{1 - y}$ kifejezés nem értelmezhető, ezért ilyen y -ok nem adnak tényleges pontokat H -hoz. Így

$H = \{(x, y) : y \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y}, 0 \leq y \leq 1\}$, tehát H -t az $y = 1 - (x - 1)^2$ parabola és az $y = x$ (jobbra), $y = 0$ ($=x$ tengely, felfelé) és $y = 1$ egyenes (lefelé) határolják. Az $y = 1$ egyenesre nincs szükség, az előző feladathoz hasonló okok miatt.

12.6.

a₁) A feladatban felírt képlet vízszintesen integrál. Ekkor H éppen az $A(0, 0)$, $B(0, 1.5)$, $C(2.25, 1.5)$ és $D(3, 0)$ pontok által meghatározott trapéz (készítsen ábrát!), ezért függőleges integráláskor $x = 2.25$ -nél ketté kell vágnunk a H tartományt. Mivel az $x = 3 - \frac{1}{2}y$ egyenes ekvivalens $y = 6 - 2x$ -el, így

$$\int_0^{1.5} \left(\int_{x=0}^{x=3-y/2} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^{2.25} \left(\int_{y=0}^{y=1.5} f(x, y) dy \right) dx + \int_{2.25}^3 \left(\int_{y=0}^{y=6-2x} f(x, y) dy \right) dx.$$

b*) A feladatban felírt képlet függőlegesen integrál. A H tartományt az x tengely, az $y = x^2$ parabola, az $x = 4$ függőleges és az $y = 2x - 6$ (ferde) egyenes határolják (készítsen ábrát!). A két egyenes a $(4, 2)$ pontban metszi egymást, ezért vízszintes integráláskor $y = 2$ -nél ketté kell vágnunk a H tartományt. Mivel az $y = 2x - 6$ egyenlet ekvivalens $x = \frac{y}{2} + 6$ -al, így

$$\int_H \int f = \int_0^2 \left(\int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/2+6} f(x, y) dx \right) dy + \int_2^{16} \left(\int_{x=\sqrt{y}}^{x=4} f(x, y) dx \right) dy.$$

12.7.a) H tulajdonképpen az $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ és $B(1, 0)$ pontok által meghatározott háromszög. A vízszintes és a függőleges lehetőségek:

$$\int_H \int f = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx .$$

Liouville tétele szerint az $\int e^{x^2} dx$ primitív függvény képlettel nem írható fel, ezért csak függőlegesen tudunk integrálni:

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[ye^{x^2} \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 (xe^{x^2} - 0) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} \approx 1.3591 . \end{aligned}$$

12.2 Transzformációk

12.8.a) Az $\{x = r \cdot \cos(\varphi) + u_0, y = r \cdot \sin(\varphi) + v_0\}$ helyettesítésnél $(u_0, v_0) = (0, 0)$ a kör középpontja, $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, tehát

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_H \int y \, dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r \cdot \sin(\varphi) \cdot r \, dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cdot \left(\int_0^1 r^2 dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{3} [-\cos(\varphi)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

b) Használjuk az $\{x = r \cdot \cos(\varphi) + u_0, y = r \cdot \sin(\varphi) + v_0\}$ helyettesítést: $(u_0, v_0) = (1, 0)$, $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \pi$, tehát

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_H \int yx \, dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 r \sin(\varphi) (r \cos(\varphi) + 1) r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^3 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + r^2 \sin(\varphi) \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 + \sin(\varphi) \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(2\varphi) d\varphi + \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (-\cos(2\varphi)) \right]_0^\pi + \frac{1}{3} [(-\cos(\varphi))]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{1}{3} (1 + 1) = \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

(Lásd még a 12.4.e) feladat megoldását is.)

12.9.a) A paralelogrammát az $\vec{u} = (3, 1)$ és $\vec{v} = (2, 3)$ vektorok feszítik ki¹⁾, tehát alkalmazzuk az $\{x = 3k + 2\ell, y = k + 3\ell\}$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} \int_H \int f &= \int_0^1 \int_0^1 ((3k + 2\ell)^2 - (k + 3\ell)^2) (3 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \, dk d\ell = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (8k^2 + 6k\ell - 5\ell^2) \cdot 7 \, dk d\ell = 7 \int_0^1 \left(\int_0^1 (8k^2 + 6k\ell - 5\ell^2) \, dk \right) d\ell = \\ &= 7 \int_0^1 \left(\left[\frac{8}{3}k^3 + \frac{6}{2}k^2\ell - 5\ell^2k \right]_{k=0}^{k=1} \right) d\ell = 7 \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + \frac{6}{2}\ell - 5\ell^2 - 0 \right) d\ell = \\ &= 7 \left[\frac{8}{3}\ell + \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{5}{3}\ell^3 \right]_0^1 = 7 \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{3} - 0 \right) = \frac{35}{2} . \end{aligned}$$

12.10.a) Az Útmutatás alapján $\left\{ x = \sqrt{\frac{k}{\ell}}, y = \sqrt{k\ell} \right\}$, $\det(J) = \frac{1}{2\ell}$ és $1 \leq k \leq 4$, $1 \leq \ell \leq 2$. Ezek alapján

$$\begin{aligned} \int_H \int y/x \, dx dy &= \int_1^2 \left(\int_1^4 \sqrt{k\ell} / \sqrt{\frac{k}{\ell}} \cdot \frac{1}{2\ell} dk \right) d\ell = \int_1^2 \left(\int_1^4 \frac{\ell}{2\ell} dk \right) d\ell = \int_1^2 \left(\int_1^4 \frac{1}{2} dk \right) d\ell = \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}k \right]_{k=1}^{k=4} d\ell = \int_1^2 \frac{3}{2} d\ell = \left[\frac{3}{2}\ell \right]_1^2 = \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

eof

¹⁾ ellenőrzés: $B + \vec{v} = D + \vec{u} = C$.