

Matematika I. – 12. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára

Improprius integrálok

1. **Feladat.** Számítsuk ki a következő improprius integrálokat, ill. állapítsuk meg, hogy divergensek-e!

$$(1) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$(2) \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+3x)^4} dx$$

$$(3) \int_2^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2} dx$$

$$(4) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-2)^2} dx$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(6) \int_1^{\infty} \frac{1}{3+x^2} dx$$

$$(7) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$$

$$(8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

$$(9) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$(10) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} dx$$

$$(11) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+2x^2} dx$$

$$(12) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5+6x}} dx$$

$$(13) \int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x} dx$$

$$(14) \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$(15) \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sin(x) dx$$

$$(16) \int_0^{\infty} (2-3x) \cdot e^{-x-1} dx$$

$$(17) \int_1^{\infty} x^3 \cdot e^{-4x^2} dx$$

2. **Feladat.** A következő integrálok véges intervallumra vonatkoznak! Állapítsuk meg, hogy miért impropriusak, majd – ha konvergensek – számítsuk ki őket!

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(2) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$(3) \int_5^8 \frac{1}{\sqrt[10]{x-5}} dx$$

$$(4) \int_3^6 \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x-3)}} dx$$

$$(5) \int_0^1 \ln(x) dx$$

$$(6) \int_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$$

$$(7) \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(8) \int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} dx$$

$$(9) \int_0^1 \frac{1}{(4-x)\sqrt{1-x}} dx$$

$$(10) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$$

$$(11) \int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx$$

$$(12) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-9)^2}} dx$$

$$(13) \int_0^6 \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-9)^2}} dx$$

$$(14) \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(15) \int_{-1}^0 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(16) \int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} dx$$

$$(17) \int_0^2 \frac{1}{(x^2-2x)^2} dx$$

3. **Feladat.** Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^{-\frac{1}{2}}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ e^{-x}, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

Számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

integrálokat!

4. **Feladat.** Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-ax} \, dx = 1$$

egyenlőség teljesüljön!

5. **Feladat.** Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{a-bx}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és $b > 0$. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{2}$$

teljesüljön!

Jó munkát!