Matematika Története

Szögek harmadolása

Kirchner Benjamin

Ókori híres matematikai problémák

- Kör négyszögesítése
- Kocka kettőzése
- Szög harmadolása
- Szabályos hétszög szerkesztése
- Ikerprímek
- Tökéletes számok

Euklidészi szerkesztés szabályai

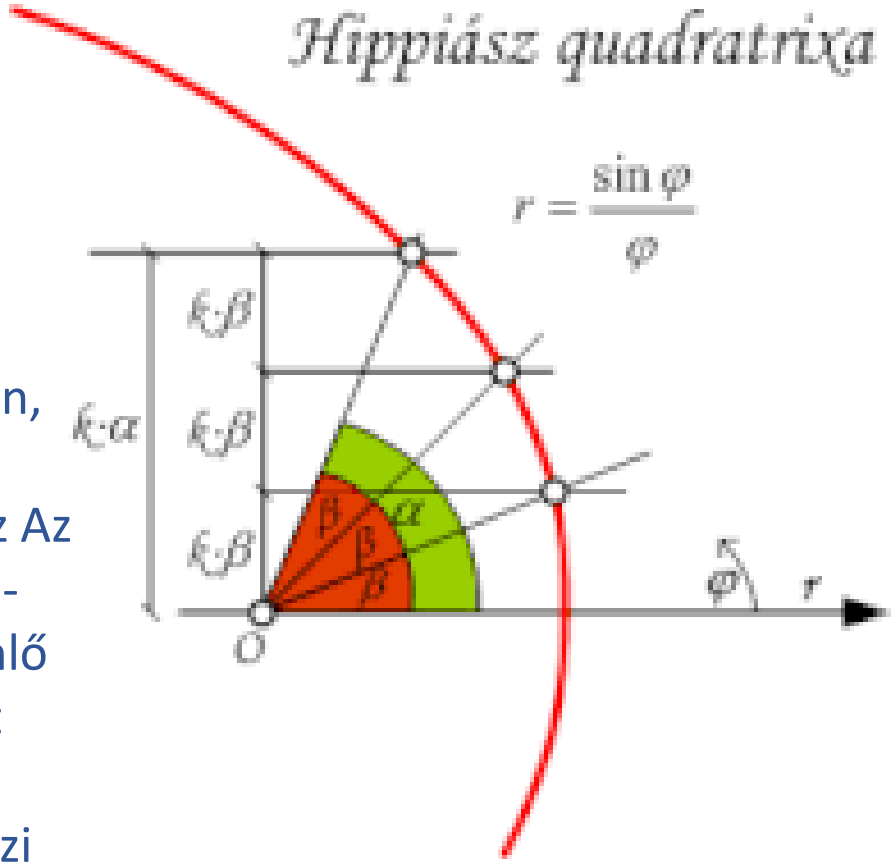
- Csak egyélű vonalzó és körző használható
- A vonalzót két adott ponton átmenő egyenes megrajzolására használhatjuk.
- A körzővel adott pont körül adott hosszú sugárral kört rajzolhatunk
- Két egyenes metszéspontját megjelölhetjük.
- Egyenes és kör metszéspontját megjelölhetjük.
- Két kör metszéspontját megjelölhetjük.
- Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.

Szögek harmadolása

- Első feljegyzések i. e. IV. sz.
- A feladat lényege, hogy euklidészi eszközökkel egy tetszőleges nagyságú szögnek a harmadával egyenlő nagyságú szöget kell megszerkeszteni euklidészi szerkesztés szabályai szerint.
- Az ókorban már sejtették a megoldhatatlanságát de bebizonyítani nem tudták.
- Az idők során születtek eljárások a szögek harmadolására, de ezek nem nyújtottak megoldást, mivel segédeszközöket vagy segéd görbéket igényeltek és így nem teljesültek az eukleidészi szerkesztés feltételei.

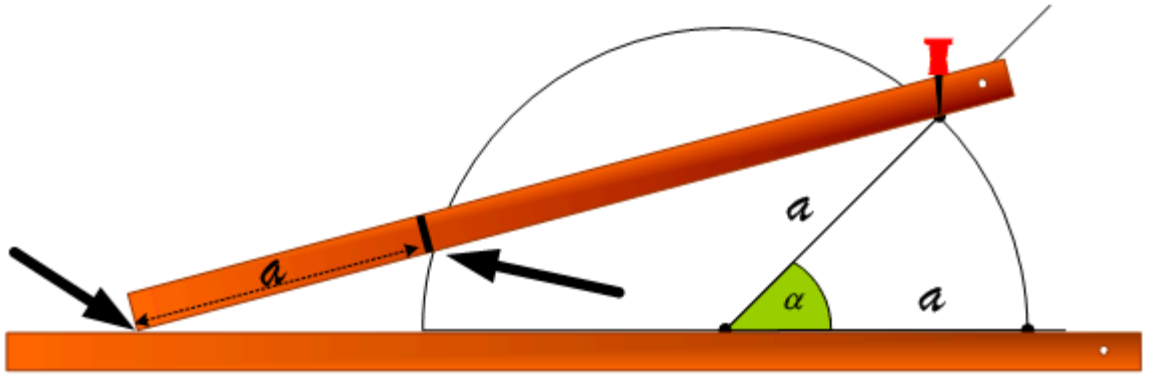
Szög harmadolási módszerek

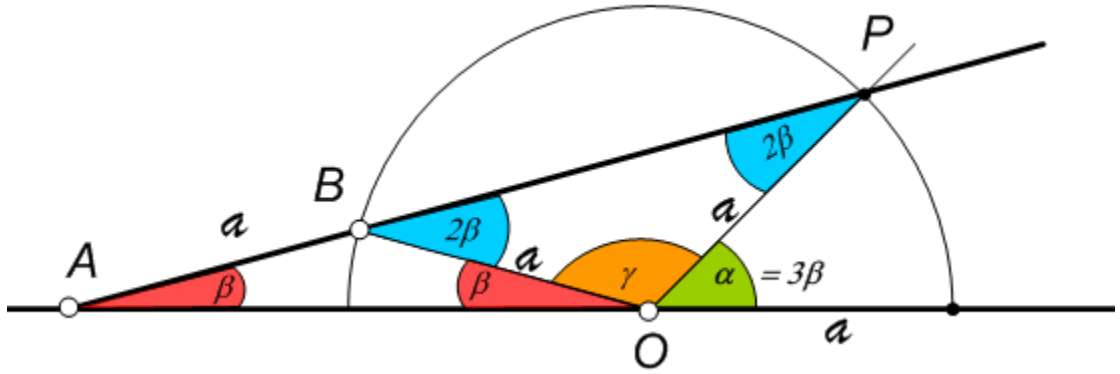
- Hippiász (i. e. IV. sz., görög)
- Kvadratix görbe felhasználása
- Probléma: A görbe összes pontja nem szerkeszthető meg euklidészi szerkesztéssel.
- Szerkesztés: A harmadolandó szög csúcsát az O pontba csúsztatjuk úgy, hogy az egyik befogó a valós tengelyre essen, a másik befogó metszi a kvadratix görbét, erre a pontra húzunk egy egyenest, ami párhuzamos a valós tengellyel. Ez Az egyenes és a valós tengely határol egy szakaszt, amely k* α -val egyenlő, ezután a szakasz tetszőleges mennyiségű egyenlő szakaszra osztható, amely a kvadratix görbén leképezi adott szög adott hányadú részét.
- Érdekesség: a szakasz felosztható egyenlő részekre euklidészi szerkesztéssel de a szögek nem!



Szög harmadolási módszerek

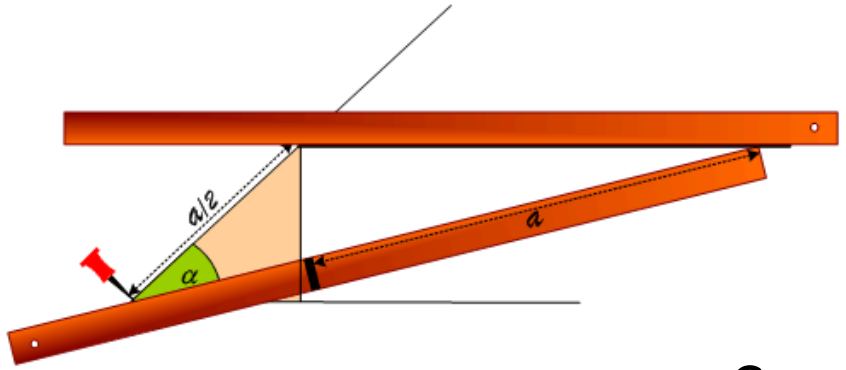
- Arkhimédész (i. e. 287. – i. e. 212. görög)
- Betoló vonalzó (N-vonalzó) felhasználása
- Probléma: Betoló vonalzó felhasználásával nem teljesülnek az euklidészi szerkesztés feltételei. (neuszisz szerkesztés)
- Szerkesztés: Veszünk α tetszőleges nagyságú szöget, amely egyik befogójához illesztjük a vezérvonalzót. Ezután a szög csúcsa körül *a* sugarú félkört rajzolunk. A félkör és a befogó metszik egymást a P pontban, ezután a segédvonalzóra felmérünk *a* hosszúságú szakaszt és azt úgy illesztjük a P ponthoz, hogy a szakasz egyik vége a vezérvonalzóhoz, másik vége a felkörívhez illeszkedjen. Ezután előáll β szög ami α harmada.

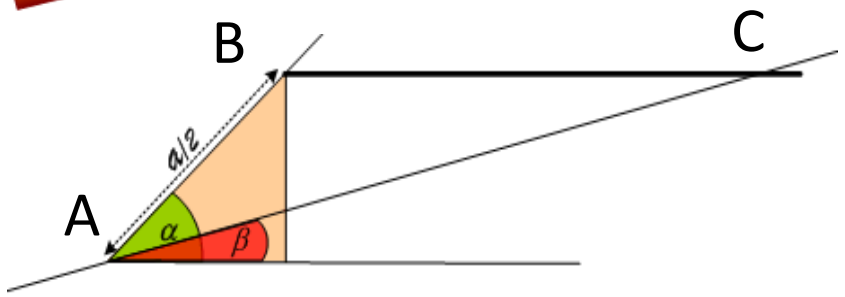


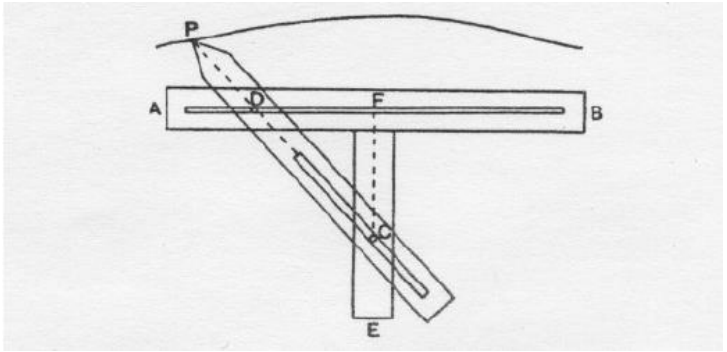


Szög harmadolási módszerek

- Nikomédész (i. e. II. sz. görög)
- Konhoisz síkgörbe felhasználása
- Probléma: Ez a síkgörbe csak konhoisz körzővel szerkeszthető meg
- Szerkesztés: Az alábbi szerkesztésnél a konhoiszi síkgörbét egy vonalzóval helyettesítjük. Vesszük a segédvonalzót, amelyre felmérünk *a* hosszúságú szakaszt. A szög egyik befogójára felmérünk *a/2* hosszúságú szakaszt, erre a B pontra helyezzük a vezérvonalzót úgy hogy az párhuzamos legyen a másik befogóval. Ezután a segédvonalzót az α szög A csúcsához igazítjuk és úgy mozgatjuk be, hogy az segédvonalzón lévő *a* szakasz egyik végpontja a vezérvonalhoz essen, a másik pedig a befogóra állított merőlegeshez essen.
- Érdekesség: Az alsó képen látható az eszköz, amivel lehetséges konhoiszi síkgörbét szerkeszteni.

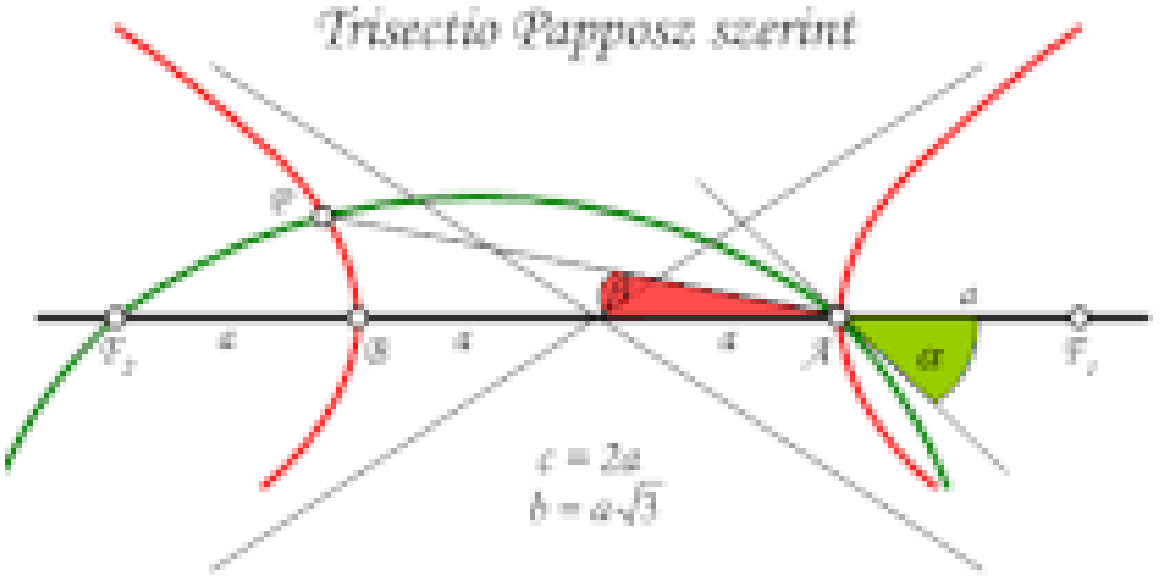






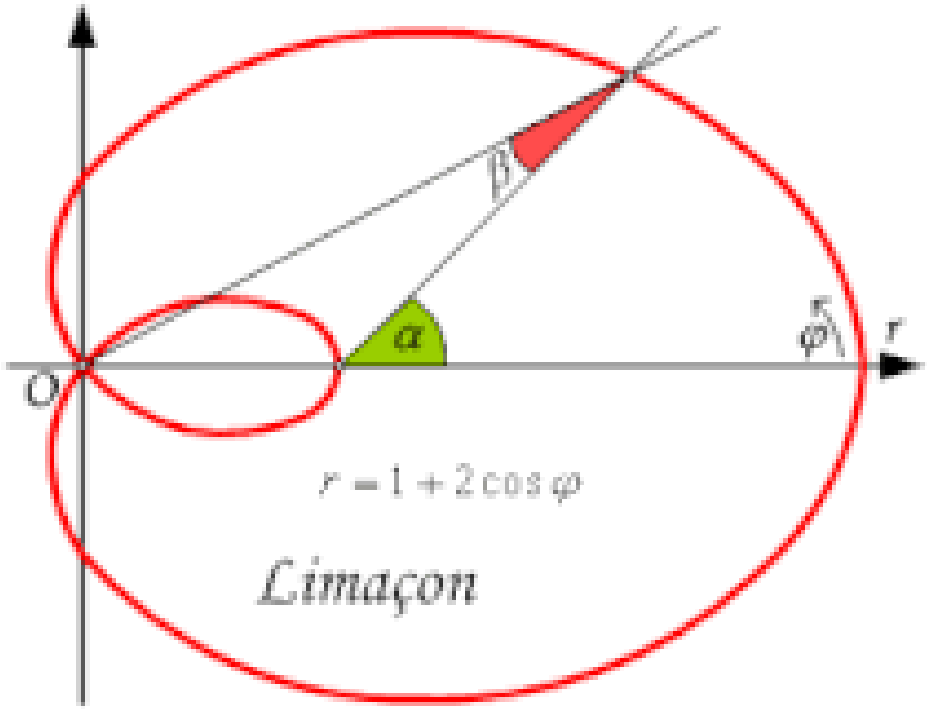
Szög harmadolási módszerek

- Papposz (i. sz. 290-360)
- Szög harmadolása hiperbola és kör metszésével
- Probléma: Hiperbola minden pontja nem szerkeszthető meg euklidészi szerkesztés szabályai szerint
- Szerkesztés: Meg kell rajzolni egy olyan hiperbolát, aminek (lineáris) excentrumossága a valós féltengely kétszerese c=2a . Az egyik csúcs (A) és a másik fókusz (F2), mint húr fölé 180-alfa látószögnek megfelelő körívet kell szerkeszteni.



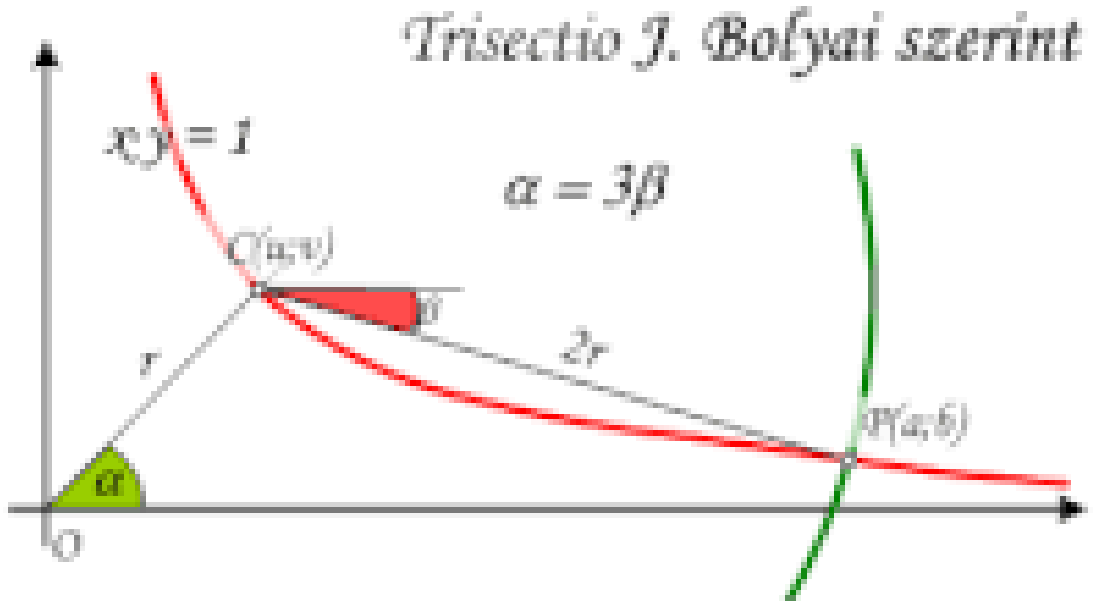
Szög harmadolási módszerek

- Pascal (1623-62)
- Pascal féle csigagörbe felhasználása
- Probléma: A csigagörbe a kör egyik konhoisza
- Szerkesztés: Az r=1+cos(ϒ) egyenletű csigagörbéhez illesztjük az ábrán látható módon az α szögű befogópárt, úgy hogy az egyik befogó a valós tengelyre essen. Az α szög csúcsa, a befogó és a csigagörbe metszéspontja illetve az O pont határozza meg β értékét ami az α szög harmada.



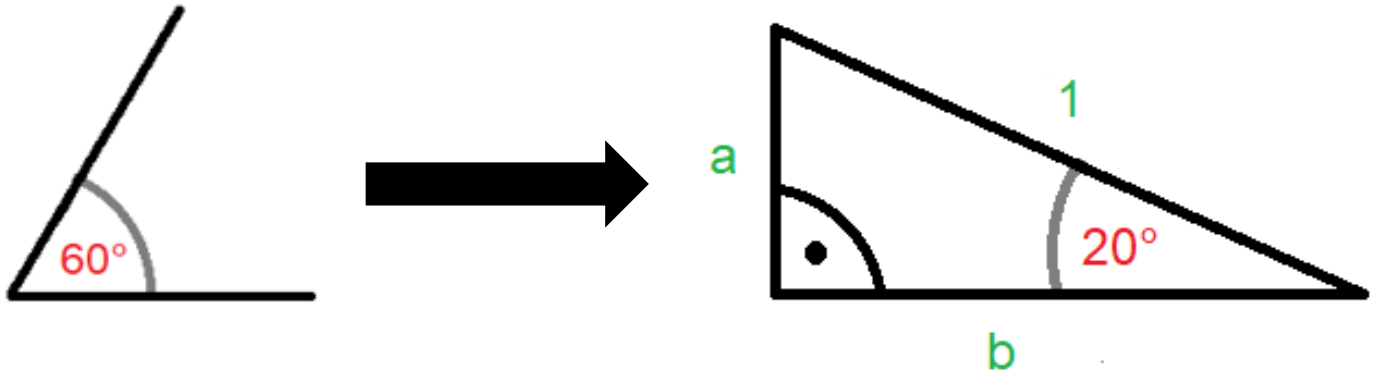
Szög harmadolási módszerek

- Bolyai János (1802-1860)
- xy=1 hiperbola felhasználása
- Probléma: Hiperbola nem szerkeszthető euklidészi szerkesztés szabályai szerint
- Szerkesztés: Az α szög csúcsát becsúsztatjuk az origóba, úgy hogy az egyik befogó a valós tengelyre essen. A másik befogó metszi a hiperbolát. Az O és C pontok közötti szakasz hosszának kétszeresével megegyező sugarú kört rajzolunk a C pont köré. A kör metszi P pontban a hiperbolát. A CP egyenes és a C pontba húzott egyenes, ami párhuzamos a valós tengellyel, határozza meg β értékét ami az α szög harmada.
- Érdekesség: Bólyai János csupán 17 éves volt amikor megalkotta a módszerét a szögharmadolásra



Bizonyítás

- Pierre Laurent Wantzel(1814-1848, francia) 1837-ben bizonyította be a szögek harmadolásának megoldhatatlanságát Eukleidészi szerkesztés szabályai szerint.



- Wantzel a 60° fokos szöget használta fel, ami azt jelentette hogy 20° szöget kellett volna megszerkesztenie az euklidészi szerkesztés szabályai szerint. Vett egy derékszögű háromszöget amelynek egyik szöge 20° és átlója 1. A cosinus függvény segítségével meghatározható, hogy a b oldalnak cos(20°) hosszúságúnak kell lennie, amit euklidészi szerkesztéssel kell előállítani.

A geometriai probléma megoldása algebrai módon mutatkozik. A bizonyításhoz vesszük a alábbi trigonometriai azonosságot, amelybe a 60°-t behelyettesítve és az egyenletet levezetve belátható, hogy a szögharmadolás megoldhatatlan az eukleidészi szerkesztés szabályai szerint mert az x értéke minden β esetén transzcendens szám lesz.

$$\cos 3\beta = 4cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)$$

$3\beta = 60°$ ↓ ↓ $x = \cos(\beta)$

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

↓

$$0 = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

↓

Az egyenlet gyökei transzcendens számok

↓

Nem algebrai számok

↓

x nem szerkeszthető meg euklidészi szerkesztéssel

Érdekesség

A szögharmadolás megoldhatatlanságával közel egyidejűleg, másik két problémáról, a kör négyszögesítéséről és a kocka kettőzéséről is bebizonyították algebrai úton, hogy nem lehetséges megszerkesztésük euklidész szerkesztési szabályai szerint, mert a szögharmadoláshoz hasonlóan, a szerkesztésükhöz egy transzcendens számot kellene megszerkeszteni euklidészi eszközökkel.

Források

- wikipedia.hu – Szögharmadolás - https://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%B6gharmadol%C3%A1s
- Számológépek gyökök ellen - 2019 – Dr. Szalkai István - http://math.bme.hu/~hujter/191230.pdf
- A szögharmadolás és az euklidészileg nem szerkeszthető problémák - 2016 - Madarász Zsuzsa, Tóth Gergő, Szegeczki Imre, Madarász Kata, Kovács Gellért- http://hermangimnazium.hu/sites/default/files/sz%C3%B6gharmadol%C3%A1s.pdf
- matekarcok.hu – Szögharmadolás - https://matekarcok.hu/szogharmadolas/
- wikipedia.org – Nicomedes - https://en.wikipedia.org/wiki/Nicomedes_(mathematician)

Köszönöm a figyelmet!