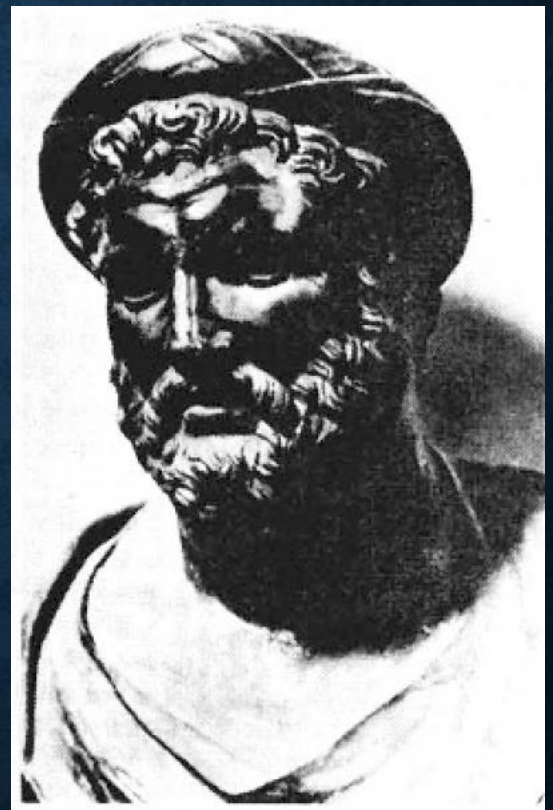
PÜTHAGOREUSOK MATEMATIKAI ELMÉLETE

Készítette: Szteblák Zsuzsa

PÜTHAGORASZ

A Szamoszi PÜTHAGORASZ (Kr. e. 570 – Kr. e. 495)

- **filozófus** és
- **matematikus** volt, akit mondhatunk
- **fizikusnak**,
- **csillagásznak** és
- **mágusnak**, vagy akár
- **vallásalapítónak** is.



Püthagorasz

PÜTHAGORASZ

- Állítólag Szüroszi PHEREKÜDÉSZ és Milétoszi THALÉSZ is tanította, az ő hatására indult Egyiptomba, hogy megismerje a tudományok gyökereit.
- Hazatérve tanítani kezdett, állítólag fizetett első tanítványainak, hogy meghallgassák.
- Állítólag fogoly volt Babilóniában, ahol a kaldeusok vallásával, filozófiájával, zenéjével, csillagászatával ismerkedett meg.
- Visszatérve egy vallásos jellegű, politikai célokért küzdő, matematikai tudományokkal foglalkozó titkos társulatot hozott létre. Szamosz szigetéről Krotónba menekült (Polükratész türannosz miatt)
- Monda: Szübarisz legyőzését segíti - fuvolamuzsikára táncoló lovak
- Krotónban sikeres, női hallgatói is voltak, köztük felesége: Theano

PÜTHAGOREUSZOK

Elveik:

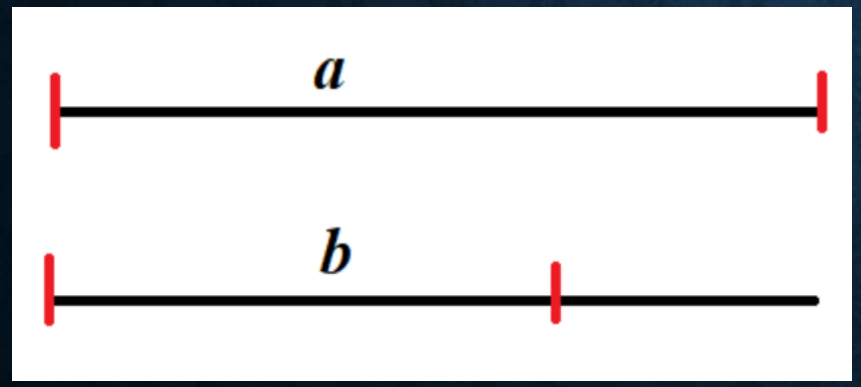
- Hittek a lélekvándorlásban, vegetáriánusok,
- Hosszú hajat, fehér gyapjúköntöst viseltek,
- Felvételi: Szigorú életmóddal, zenével kellett a lelküket megtisztítani
- Különböző próbák után beavatták őket a számok és a harmónia misztériumába.
- Számukra a számok tudományában való elmélyedés biztosította az örök igazságok megismerést.
- A matematikával való foglalkozás vallásos tevékenység volt számukra.
- Egy istenben hittek.

- Sok szám van, de mindnek a forrása „az egység”.
- A sokféle dolog között az isteni harmónia teremt rendet.
- Az ember igazi hivatása harmónia megismerése.
- Legeredményesebben a matematika művelése segíthet hozzá.
- A matematikában egyesül az aritmetika, a csillagászat, a zene.
- Szerintük a természet a számok szerint van elrendezve, és a számok törvényein keresztül ismerhető meg a mindenség.
- Két nagy kutatási területük van: **zeneelmélet, számelmélet**
- A húrok hosszának 12 egységre bontásával jöttek rá a **következő** aránypárra:

$$12 : 9 = 8 : 6$$

I. ZENE

- A kvarthoz, mint kellemes hangközhöz tartozó húrhossz 9, $1:\frac{3}{4}=4:3$
- A kvinthez a 8, $1:\frac{2}{3}=3:2$
- Oktávhoz pedig a 6. $1:\frac{1}{2}=2:1$
- Az alaphangot a 12 szám jelzi.



$$12:9=8:6$$

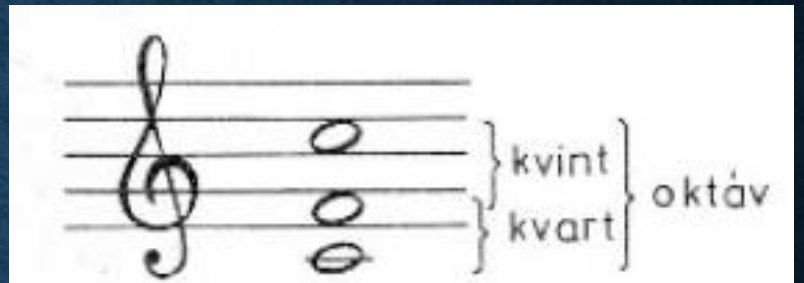
$$9=\frac{6+12}{2} \quad \text{és} \quad 8=\frac{6\cdot 12}{\frac{6+12}{2}}=\frac{2\cdot 6\cdot 12}{6+12}$$

- Ennek az aránypárnak általános alakja:

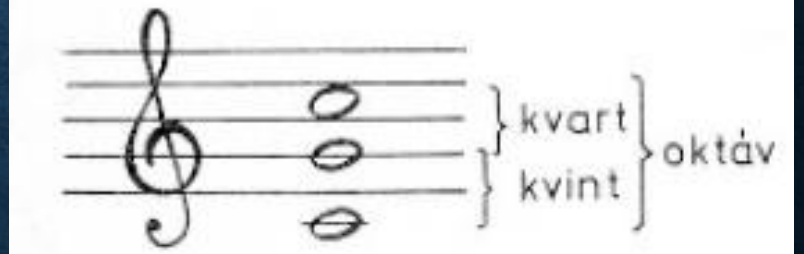
$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b.$$

Ezt hívják arany aránypárnak. Már Babilonban is ismerték.

- Észrevették, hogy nem az arányok összege, hanem a szorzata adja meg a kívánt eredményt:
- A kvart+kvint = oktáv összeadásnak
- 4+5=„8”
- A (4:3) * (3:2) = (2:1) szorzás fele meg.
- Ebből következik a kivonás is:
- Oktav – kvart = kvint
- 8 – 4 = „5”
- (2:1) : (4:3) = (3:2)



13. ábra



14. ábra

- A phütagoreusok a zenei hangtávolságokból fedezték fel a köv. két szabályt:

1. Két hangintervallum összegének az arányszáma egyenlő a két összetevő hangköz arányszámának a szorzatával.
2. Két hangköz különbségének az arányszáma egyenlő a kisebbítendő és a kivonandó hangköz arányszámának a hányadosával.

Megalkották a teljes skálát kvintugrásokkal felfelé, majd egy oktávval lejjebb hozva.

II. A PÜTHAGOREUSOK SZÁMELMÉLETE

A püthagoreusok a sokféleséget az egyetlen Istennel állították szembe, aki forrása a sokféleségnek.
Az „egység” ellentétét a számokban látták, ugyanakkor az egység szüli a számokat.
Az „egy” nem szám, hanem az eredet.
Részekre nem bontható, osztani nem, csak szorozni lehet.
Az egynél kisebb szám nincs.
Az egynél < számok ebből keletkeznek szorzással.
Ezek viszont bonthatók, mert valahány egységből állnak.
Két egyenlő számra bontható szám = PÁROS SZÁM, női jellegű
Két egyenlő számra nem bontható szám = PÁRATLAN SZÁM, hím természetű

- Az „egy” hímnős: se női, se férfi, se páros, se páratlan.
- 2: első női szám
- 3: első férfi szám
- Összegük: házasság jelképe
- 4: első négyzetszám, igazság jelképe, évszakok száma…
- Az első 4 szám arányával a püthagoraszi szümphoniák jellemezhetők
- összegük a 10 (1+2+3+4) ⟶ természet harmóniáját fejezi ki.
- Ennyi a szférák száma is.
- Ismertek szerencsét és szerencsétlenséget hozó számokat
- Tudtak tökéletes és baráti számokról.
- Ha csak ennyiből állna a számelméletük, nem volna említésre méltó.
- **Viszont:**

- Értékes kutatásokat végeztek:
  - Számok közötti kapcsolatokra,
  - Tövények felfedésére

ELSŐ SZÁMELMÉLETI TÉTELÜK: PÁROS ÉS PÁRATLAN SZÁMOKRÓL

- Néhány:
- Páros számok összege és különbsége is páros.
- Két páratlan szám összege páros.
- Páros és páratlan szám összege páros.
- Páratlan és páros szám szorzata páros.
- Olyan szám, amelynek a fele páratlan, csak úgy bontható kéttényezős szorzatra, hogy az egyik tényező páros, a másik páratlan.

A SZÁMOK OSZTHATÓSÁGA:

- Tökéletes szám fogalmát felfedezik:
  - Ez egyenlő az önmagánál kisebb osztóinak az összegével.
    - Pl. 6 = 1+2+3
    - Vagy a 28 = 1+2+4+7+14
  - Ismerték a 496 és 8128 tökéletes számokat.
  - Képzési szabálya (Nikomakhosz Geraszénosz Kr.u. 1.sz.):
    ha $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = p$ törzsszám,
    akkor $2^n p = 2^n(2^{n+1}-1)$ tökéletes szám.

- A **barátságos számpárok** fogalmának bevezetése:
- Olyan számkettősök, amelyek bármelyike egyenlő a másik valódi osztóinak (az 1-et is beleszámítva) az összegével.
- Ők csak a 220, 284 baráti számpárt ismerték:
- 220 | 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284

- A prímszámok és az
- Összetett számok fogalmát is ismerték.
- Száműzték a számok közül a törteket, bár a gyakorlati emberek használták.
- A püthagoreusi számelméletben a számok aránya jelezte törteket:
- A korábban említettek az elsők:
  - 2:1 – oktáv
  - 3:2 – kvint
  - 4:3 - kvart

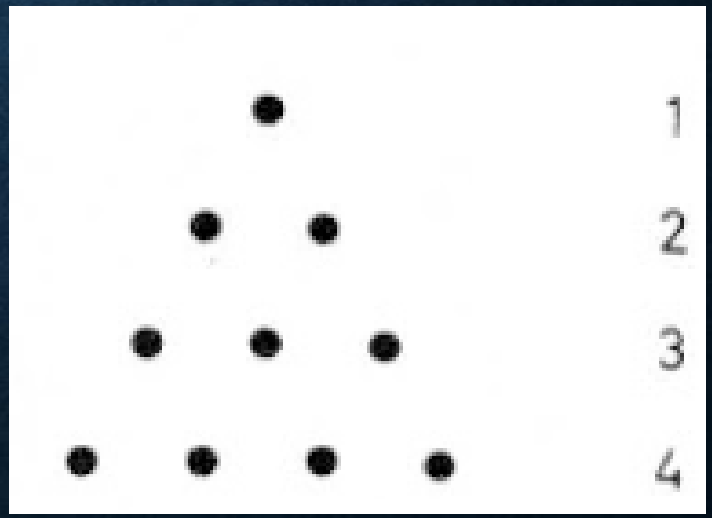
Általános alak:

$$(n+1) : n$$

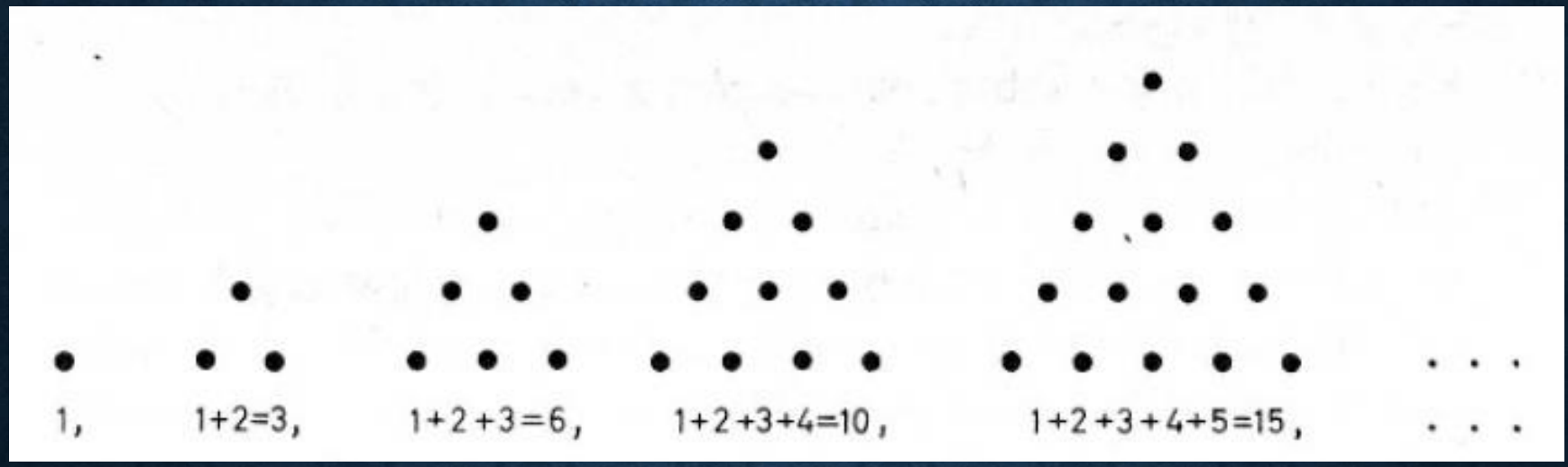
„fölös részű arány”

III. A számok geometriája

- Ennek a számelméletnek volt geomerirai színezete:
- A püthagoreusuk szerették a számokat kavicsokkal szemléltetni.
- Ezzel bizonyítottak, és figurális számoknak nevezték.
- a fülnek kellemes hangközöknél a húrhosszak aránya az 1,2, 3,4 számok arányával fejezhető ki.
- Így képzelhető el figurális számként:
- Ez a szent tetraktüsz (négyes alakzat)
- Püthagoreus szövetség jelképe
- Ezt nevezték háromszögszámnak



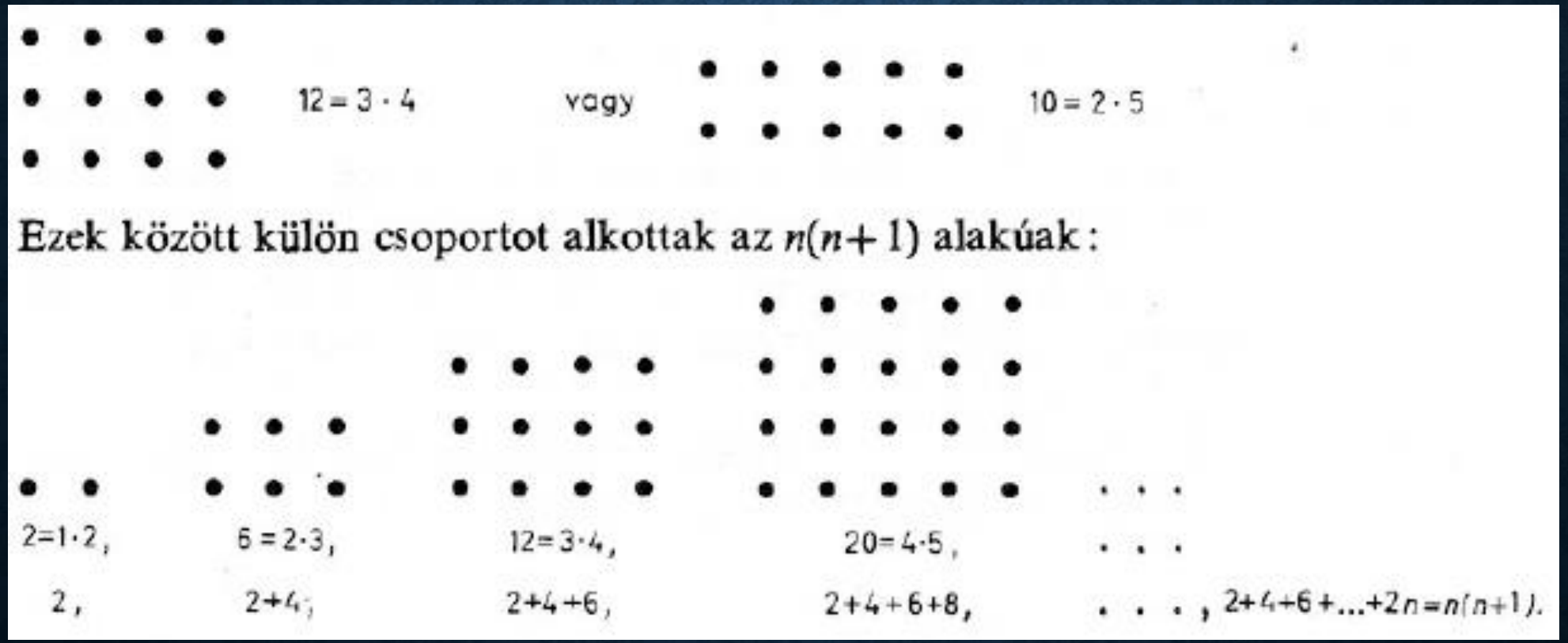
HÁROMSZÖGSZÁMOK:



Általánosságban: $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$.

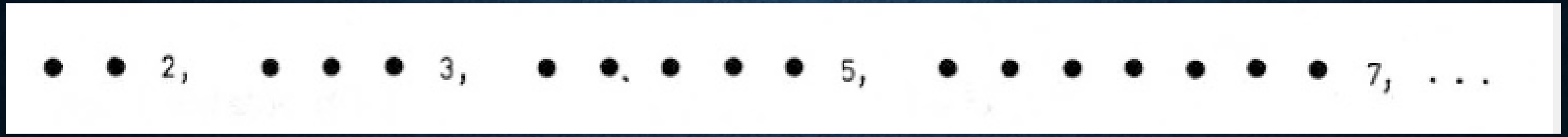
TÉGLALAPSZÁMOK

- A téglalap alakba rendeződött számok



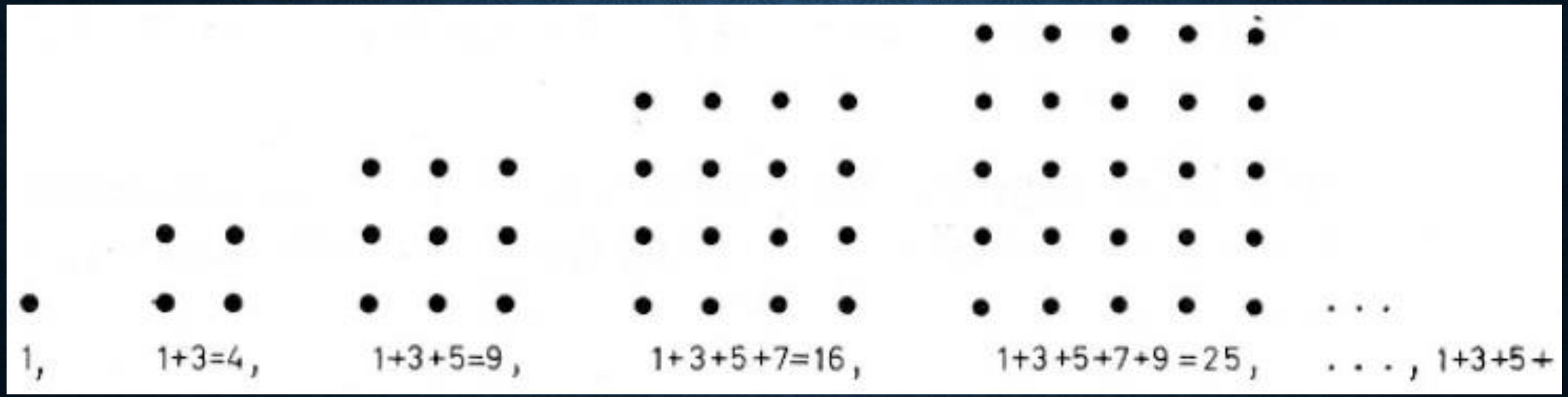
LINEÁRIS SZÁMOK

- A téglalap alakba nem rendezhetők:
- Prímszámok.

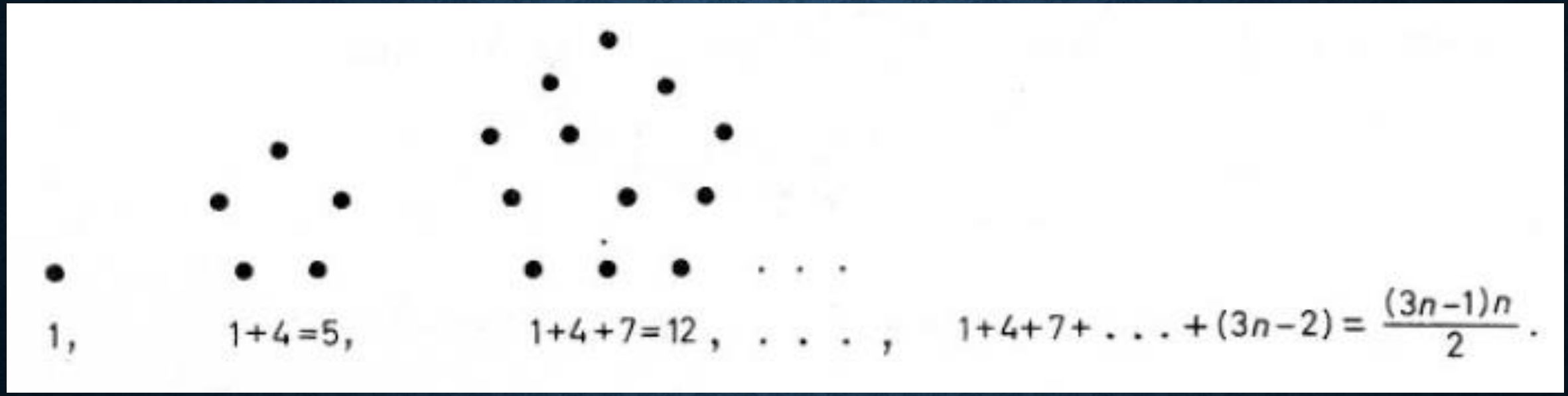


NÉGYZETSZÁMOK

- A négyzet alakba rendezhető számok:



ÖTSZÖGSZÁMOK, SÍKSZÁMOK



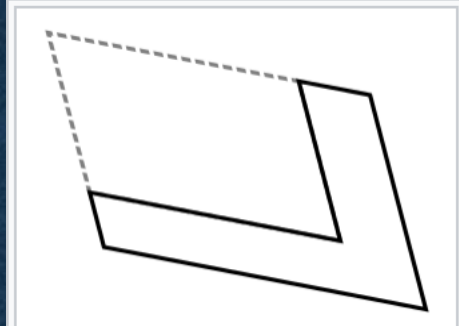
$$1,\quad 1+4=5,\quad 1+4+7=12,\quad \ldots,\quad 1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{(3n-1)n}{2}.$$

Ha folytatnánk a sort, lehetne e végtelenségig ⟶ Ezek a síkszámok!

GNÓMÓN SZÁMOK

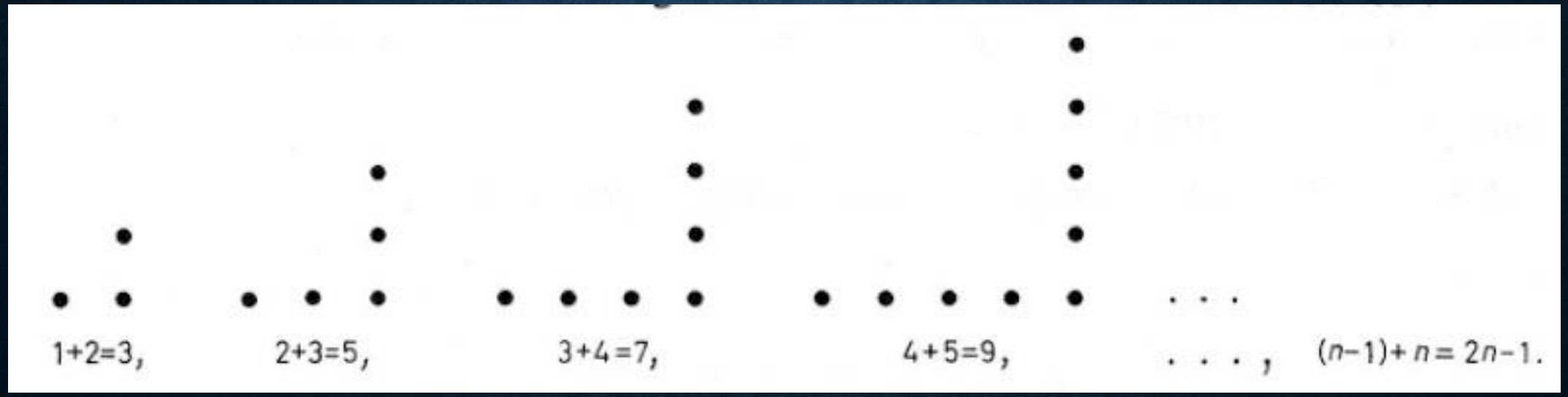


A gnomon a háromszög alakú penge ebben a napóraban.



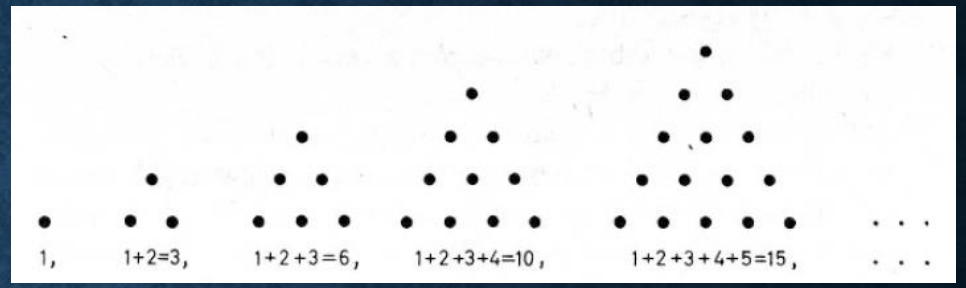
Gnomon, mint az Euklidész II. Könyvében

- A napóra görög neve.
- L formájú alakzat
- Az ilyen alakzatba rendeződő számok a gnómón számok:



KÖBSZÁMOK

- 1,8,27,64,125, …
- Észrevettek egy ügyes eljárást:



Ha a bal oldalon az első n köbszám összege áll, a jobb oldalon az n-edik háromszögszám van.

$$1^3=1$$
$$2^3=3+5$$
$$3^3=7+9+11$$
$$4^3=13+15+17+19$$
$$5^3=21+23+25+27+29$$
$$\ldots$$

ezért :

$$1^3=1 \qquad \text{(A jobb oldalon 1 tag)}$$
$$1^3+2^3=1+3+5 \qquad \text{(3 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3=1+3+5+7+9+11 \qquad \text{(6 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \qquad \text{(10 tag)}$$

- Tehát:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + \\ + (n^2 + n - 1),$$

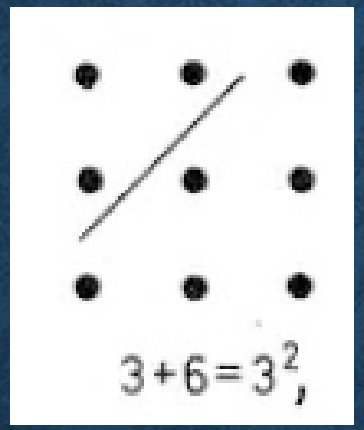
ahol a jobb oldalon $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ számú tag áll. Így:

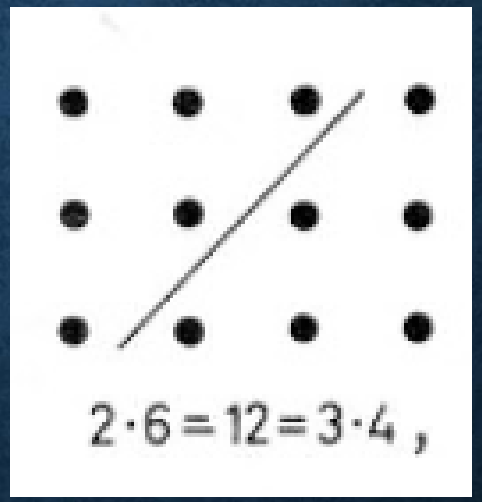
$$S_n = \frac{n^2 + n}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

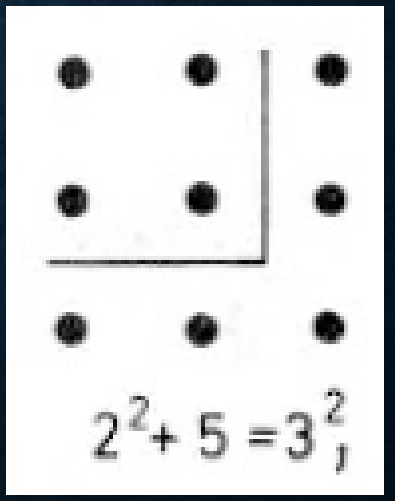
Az első n köbszám összege az n-edik háromszögszám négyzete.

FELFEDEZÉSEK A FIGURÁLIS SZÁMOK KÖZÖTT

- Két egymás utáni háromszögszám összege négyzetszám.
- Minden háromszögszám kétszerse téglalapszám.
- Egy négyzetszám, meg a hozzá illeszkedő gnómón szám az négyzetszám.







FORRÁS:

- Sain Márton: Nincs királyi út
- https://hu.wikipedia.org/wiki/A_h%C3%A9t_b%C3%B6lcs
- https://books.google.hu/books?id=WQPcDwAAQBAJ&pg=PT790&lpg=PT790&dq=PHEREK%C3%9CD%C3%89SZ+teljes+neve&source=bl&ots=pQDiCUSGyN&sig=ACfU3U1YPlrKx8qpfsN50ht3B_b91hruRA&hl=hu&sa=X&ved=2ahUKEwjK95v-uOvpAhXClosKHcS6DFcQ6AEwAnoECAoQAQ#v=onepage&q=PHEREK%C3%9CD%C3%89SZ%20teljes%20neve&f=false
- https://hu.wikipedia.org/wiki/P%C3%BCthagorasz
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gnomon