Pascal-háromszög

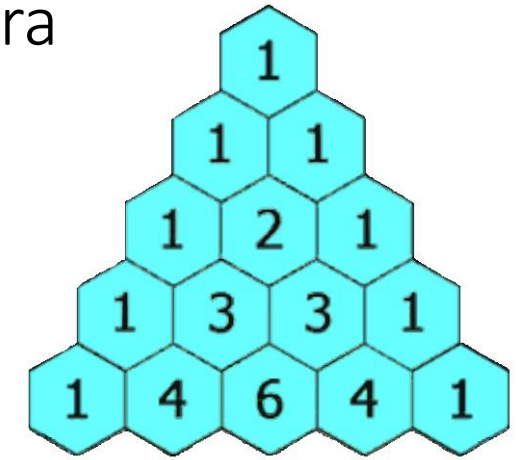
Készítette: Schönwald Milán

A Pascal-háromszög

A Pascal-háromszög a binomiális együtthatók háromszög alakban való elrendezése. Nevét Blaise Pascal francia matematikus után kapta.

A háromszög sorait fentről lefele **n=0**-tól kezdve számozzuk, a sorokban található számokat pedig minden sorban balról jobbra **k=0**-tól kezdve.

Az első sorba írunk egy egyest. A következő sorok elemeit úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a felette balra és jobbra található két számot. Ha egy szám hiányzik (sor széle), azt nullának tekintjük.

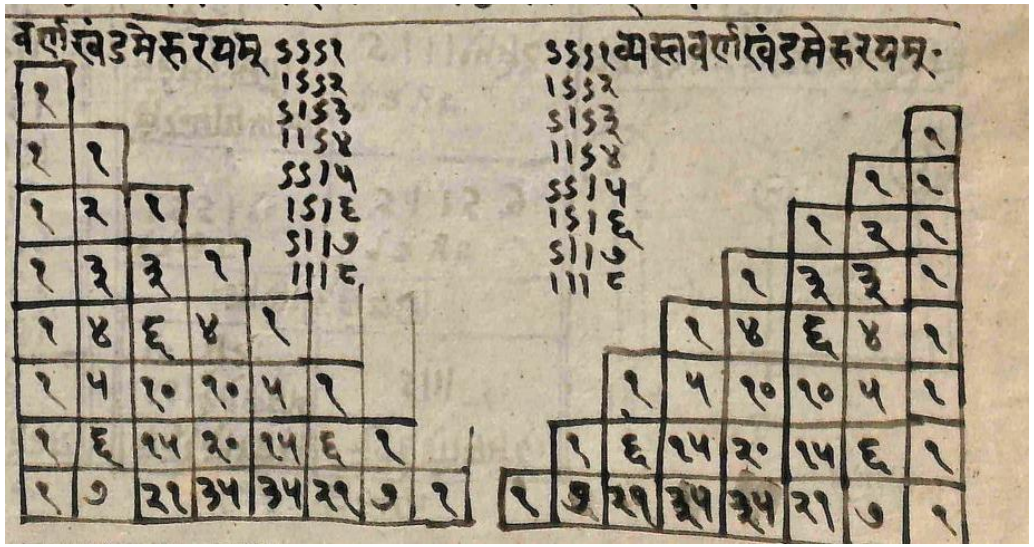


Története

A Pascal-háromszöget alkotó számok ilyen formában már jóval Pascal ideje előtt ismertek voltak.

A binomiális együtthatók háromszögbe rendezésének legkorábbi ábrázolása a 10. században bukkant fel, a *Chandas Shastra* című ókori indiai könyvhöz írott kommentárokban. A könyvet Pingala, egy indiai matematikus írta Kr. e. 2. század körül.

Később (1068-körül) Bhattotpala megadta a háromszög első 16 sorát.



Története

Nagyjából ugyanabban az időben Al-Karaji (953-1029) és Omar Khayyam (1048-1131) perzsa matematikusok is foglalkoztak a Pascal-háromszöggel, emiatt Iránban Khayyam-háromszögként is utalnak rá. Több tételt is ismertek a háromszöggel kapcsolatban, köztük a binomiális tételt is. Kayyam a binomiális tétel segítségével próbálkozott számok n-edik gyökének meghatározásával.

$$(1+x)^{\frac{s}{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(s-kt)}{n!t^n} x^n$$

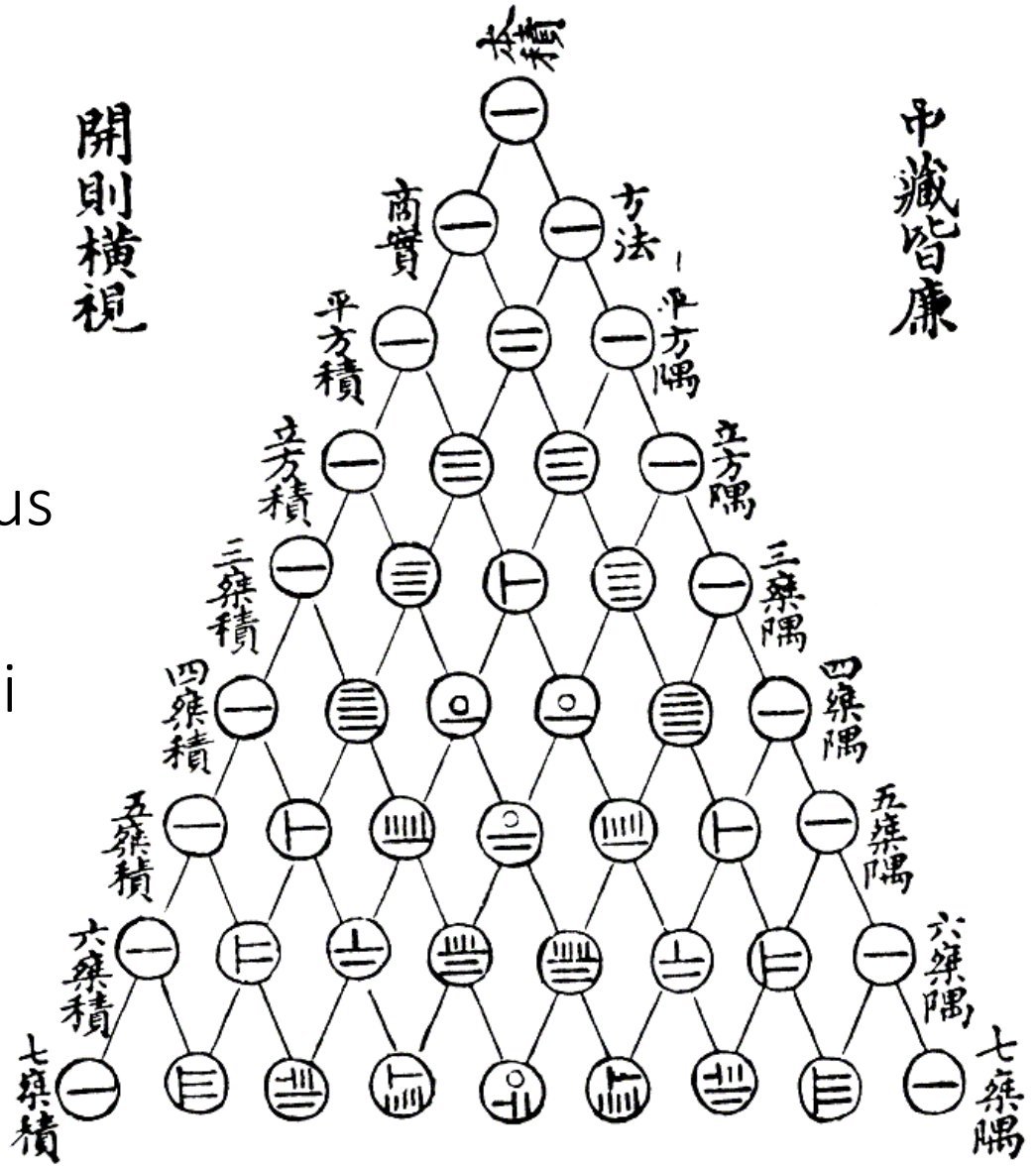
ha $|x| < 1$

Története

A Pascal-háromszög Kínában a 11. század óta ismert, Jia Xian (1010-1070) matematikus munkájának köszönhetően.

A 13. században Yang Hui (1238-1298) kínai matematikus Jia Xian leírásait alapul véve négyzetgyökök és köbgyökök keresésére használta a háromszöget.

Így a háromszöget Kínában Yang Hui-háromszög néven ismerik.





Története

Nyugaton a Pascal-háromszögről sok publikáció született.

- Gersonides (14. sz.)
- Petrus Apianus (1527)
- Michael Stifel (1544)
- **Niccolò Fontana Tartaglia (1556)**
- Gerolamo Cardano (1570)

Pascal 1655-ben publikálta tanulmányát, amiben összegyűjtötte az addig meglévő ismereteket a háromszögről, amelyeket valószínűségszámítási problémák megoldására alkalmazott.

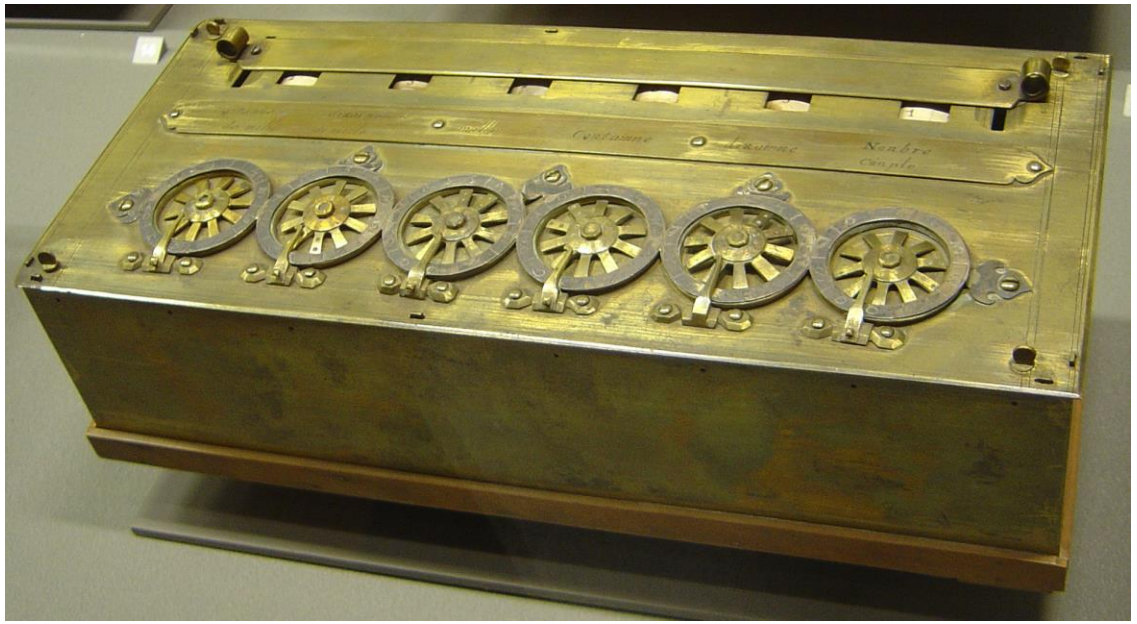
A Pascal-háromszög nevét Abraham de Moivre-től kapta 1730-ban, aki *„Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM”*-ként hivatkozott rá.

Blaise Pascal

Franciaországban született 1623-ban. Apja nagyon művelt, a tudomány és a matematika iránt érdeklődő jogász volt. Maga tanította a gyermekeit, így korán észrevette fia kiemelkedő intellektuális képességeit. Rendszeresen látogatta Marin Mersenne matematikai körét, ahova fiát is magával vitte.

1640-ben jelent meg az akkor 16 éves Pascal első tudományos műve, a *„Tanulmány a kúpszeletekről”*, majd ezen tovább dolgozva az *„Értekezés a kúpszeletek származtatásáról”* című műve 1648-ban.

1642-ben mechanikus számológépet tervezett (*pascaline*), hogy megkönnyítse édesapja munkáját. Az első működő darab 1643-ban készült el.



Blaise Pascal

1646-ban Pascal felfigyelt Torricelli kísérletére: egy higannyal teli, egyik végén zárt csövet egy higannyal teli edénybe állítanak, a higany a csőben lefelé halad, majd egy bizonyos magasságban megáll, és látszólag semmilyen anyag nem tölti ki a cső felső végében keletkező üres részt.

A következő években sokat vizsgálta ezt a jelenséget, amelyről eredményeit az 1647-ben elkészült *„Az űrre vonatkozó új kísérletek”* című kiadványában mutatta be.

1655-ben publikálta *„Traité du triangle arithmétique” (Tanulmány az aritmetikai háromszögről)* című művét. A Pascal-háromszög aritmetikai táblázatát használta a szerencsejátékok pont-problémájának megoldásához és a valószínűségszámítás fejlesztéséhez. A pontok elosztásáról Fermat-val levelezett, és bár eltérő módszerrel, de azonos eredményre jutottak.

Utolsó tudományos munkáját a ciklois-ról írta *„Traité de la roulette” (Tanulmány a rulettákról)* címmel 1659-ben.

1662. augusztus 19-én hunyt el Párizsban, 39 évesen.

Blaise Pascal





A Pascal-háromszög

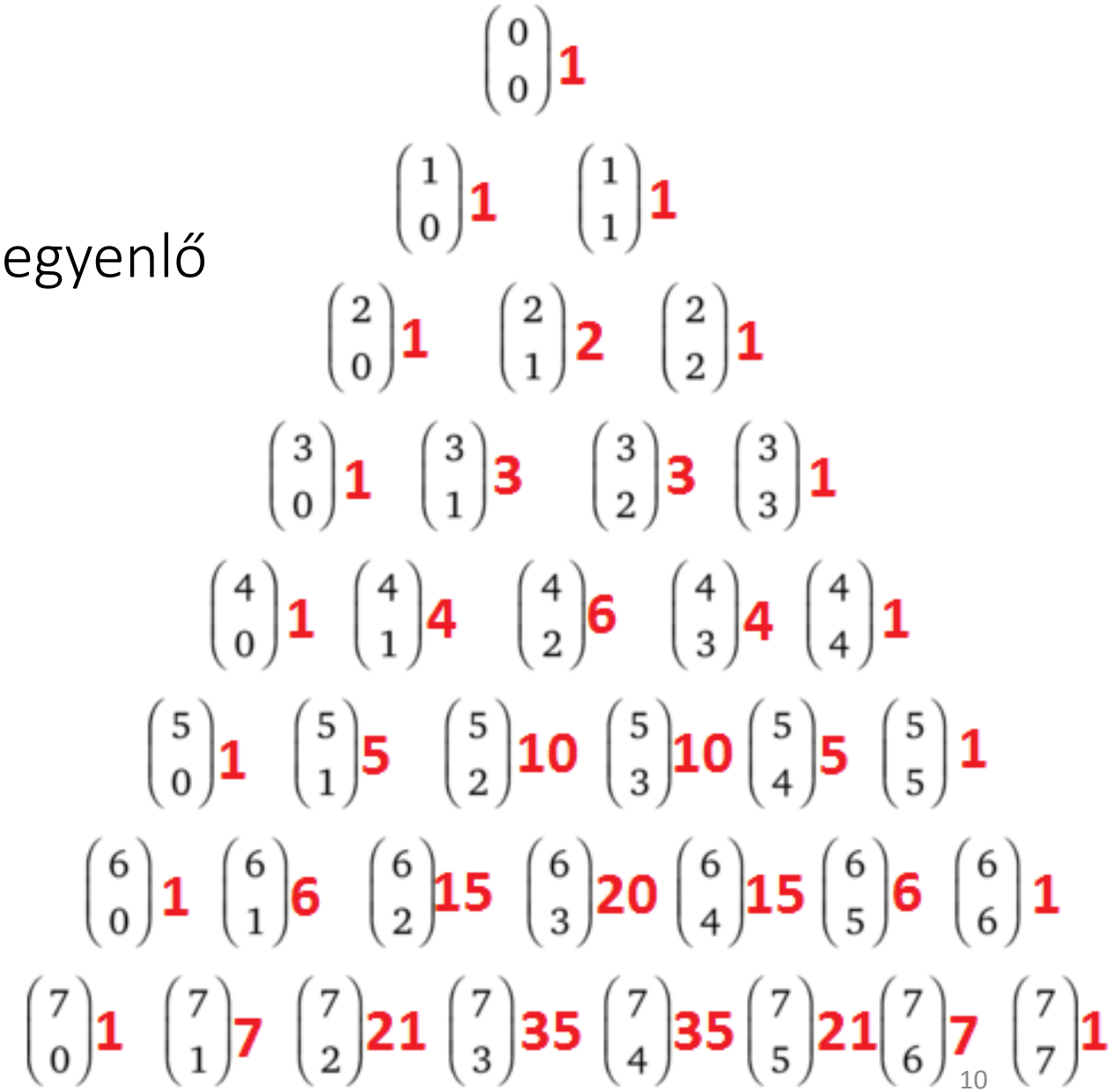
Az ***n***-edik sor ***k***-adik eleme $\binom{n}{k}$-val egyenlő

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

$\forall$ n,k $\in$ I : n $\geq$ 0; n $\geq$ k $\geq$ 0

pl: $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



A Binomiális tétel

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$

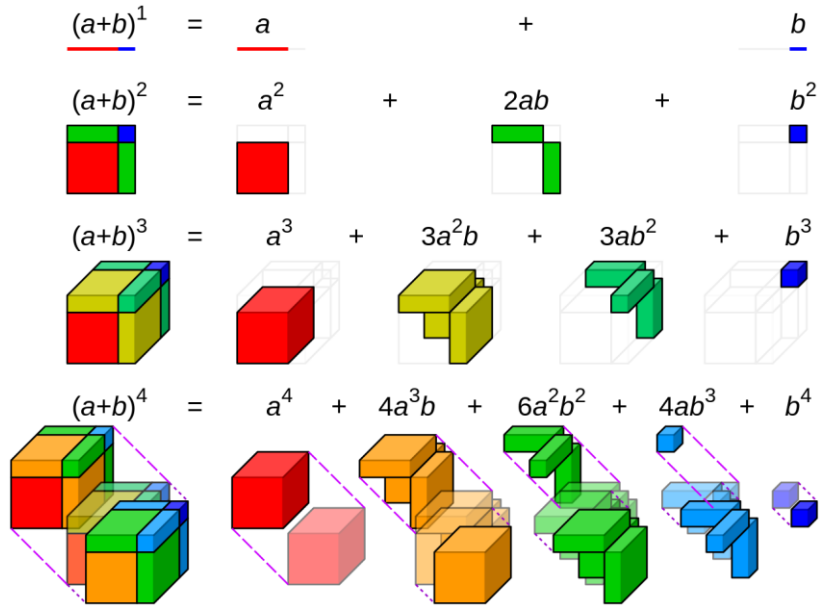
$(x+y)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n,$

ahol $a_i = \binom{n}{i}$

Ezt felírhatjuk így is:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

tetszőleges $x,y \in C$ komplex számok és $n \in N_0$ nemnegatív egész esetén.



A Polinomiális tétel

Polinomiális tétel:

$$(a_1+\cdots+a_s)^n=\sum_{0\le k_1,\ldots,k_s\le n}^{k_1+\cdots+k_s=n}\binom{n}{k_1,\ldots,k_s}*a_1^{k_1}*\cdots*a_s^{k_s}\ ,$$

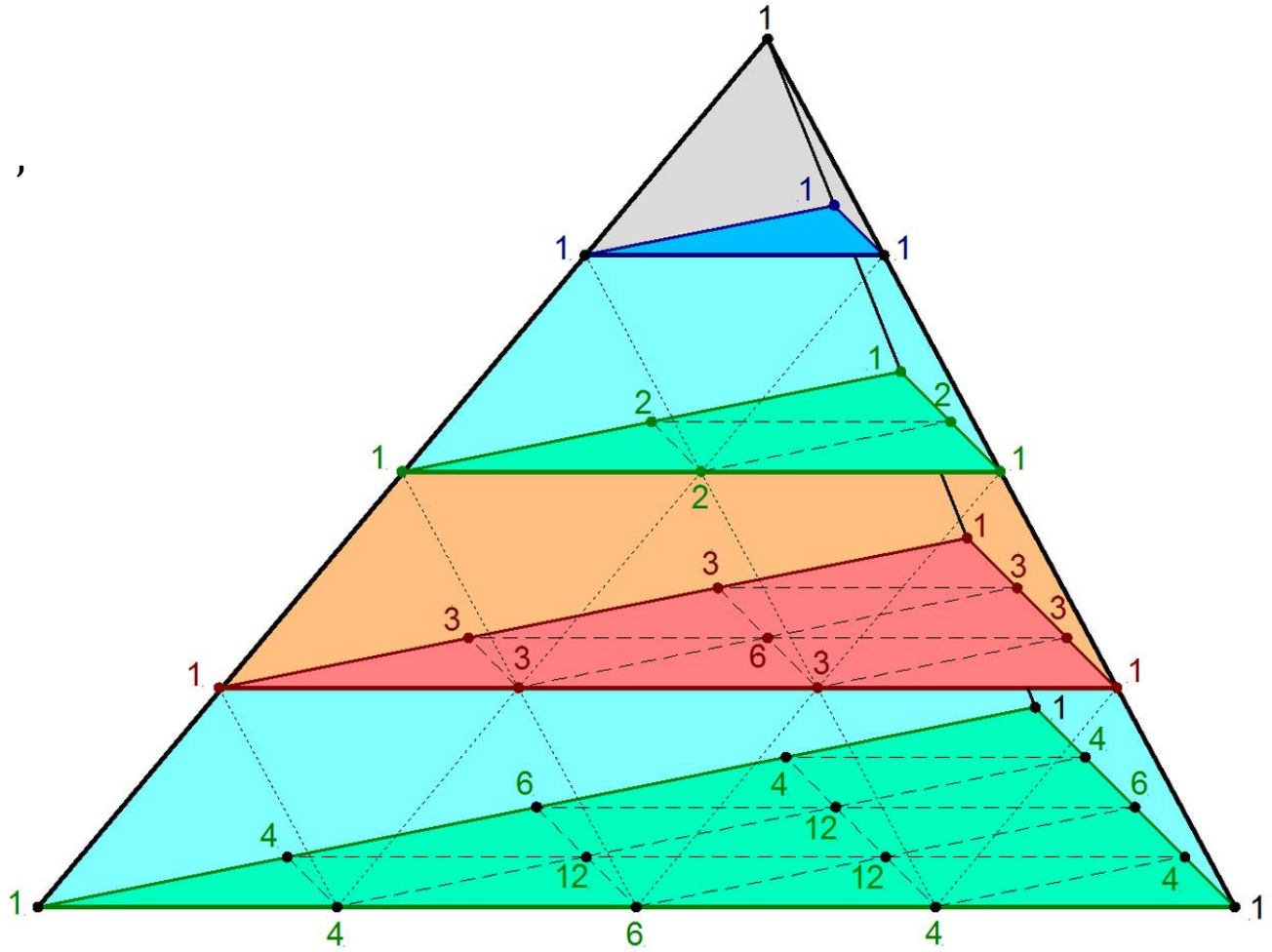
tetszőleges $a_1,\ldots,a_s \in C$ komplex számok és $s,n \in N_0$ nemnegatív egészek esetén.

Trinomiális tétel (s=3 esetén):

$$(a+b+c)^n=\sum_{0\le i,j,k\le n}^{i+j+k=n}\binom{n}{i,j,k}*a^i*b^j*c^k\ ,$$

tetszőleges $a,b,c \in C$ komplex számok és $n \in N_0$ nemnegatív egész esetén.

Pascal-gúla/Pascal-piramis



Összefüggések/Tulajdonságok

1	$\sum = 1 = 2^0$	$1 = 11^0$	$1_9 = 1$
1 1	$\sum = 2 = 2^1$	$11 = 11^1$	$11_9 = 10$
1 2 1	$\sum = 4 = 2^2$	$121 = 11^2$	$121_9 = 100$
1 3 3 1	$\sum = 8 = 2^3$	$1331 = 11^3$	$1331_9 = 1000$
1 4 6 4 1	$\sum = 16 = 2^4$	$14641 = 11^4$	$14641_9 = 10^4$
1 5 10 10 5 1	$\sum = 32 = 2^5$	$161051 = 11^5$	
1 6 15 20 15 6 1	$\sum = 64 = 2^6$		
1 7 21 35 35 21 7 1			
1 8 28 56 70 56 28 8 1			

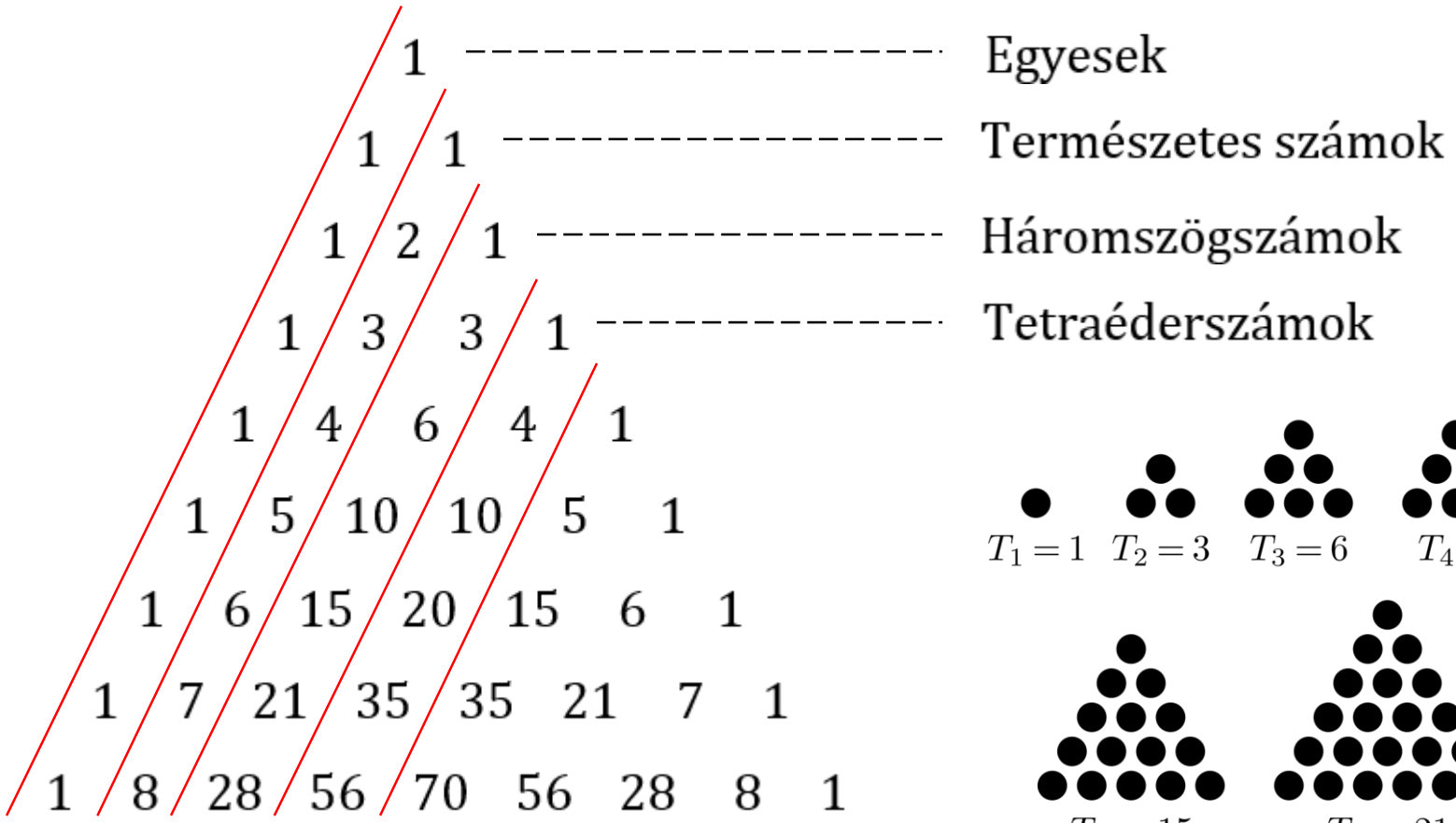
Összefüggések/Tulajdonságok

1	= 1
1 1	= 1
1 2 1	= 2
1 3 3 1	= 9
1 4 6 4 1	= 96
1 5 10 10 5 1	= 2500
1 6 15 20 15 6 1	= 162000
1 7 21 35 35 21 7 1	= 26471025
1 8 28 56 70 56 28 8 1	= 11014635520

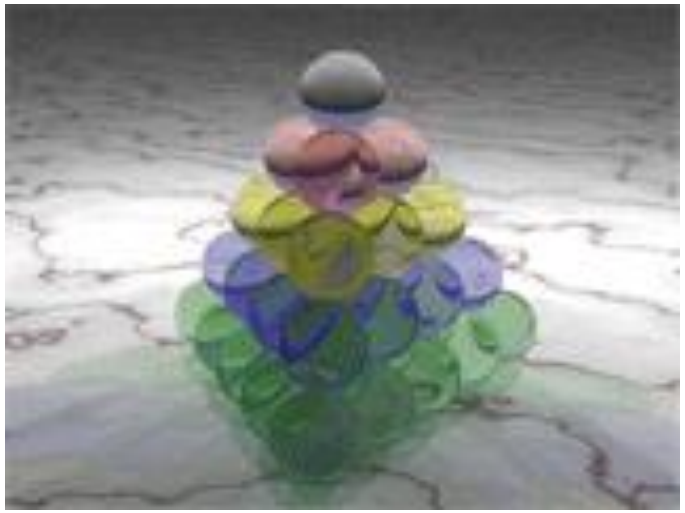
Ha S_n az *n*-edik sor elemeinek szorzata, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2} = e$$

Összefüggések/Tulajdonságok

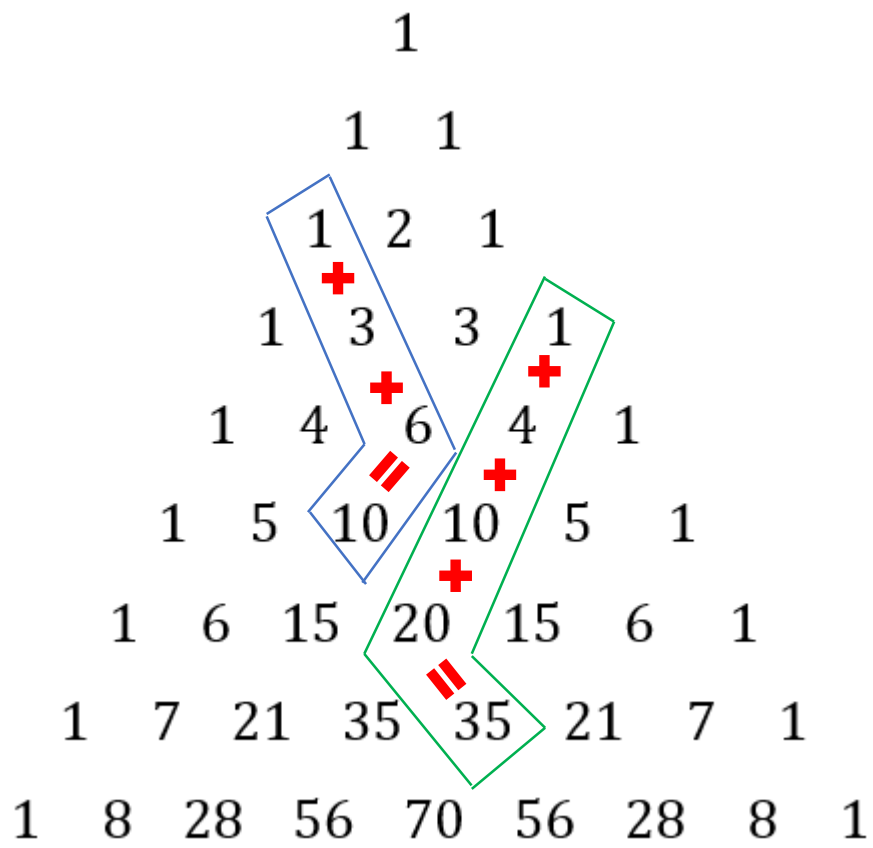


1 ⌐Natural numbers, n = C(n, 1)
1 1 ⌐Triangular numbers, T_n = C(n+1,2)
1 2 1 ⌐Tetrahedral numbers, Te_n = C(n+2,3)
1 3 3 1 ⌐Pentatope numbers = C(n+3,4)
1 4 6 4 1 ⌐5-simplex ({3,3,3,3}) numbers
1 5 10 10 5 1 ⌐6-simplex ({3,3,3,3,3}) numbers
1 6 15 20 15 6 1 ⌐7-simplex ({3,3,3,3,3,3}) numbers
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1



Összefüggések/Tulajdonságok

Hockey Stick Pattern



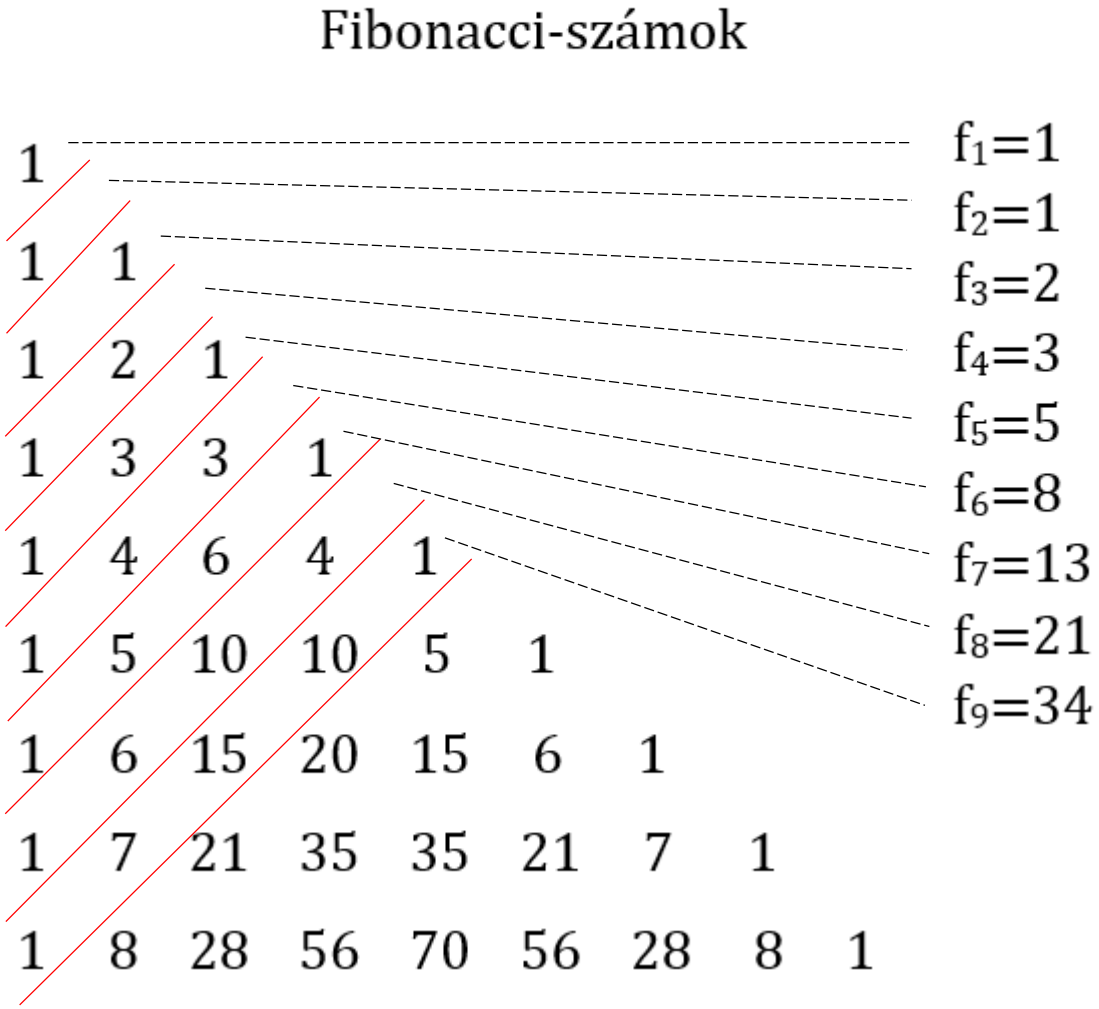
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \ldots + \binom{n-k}{0}$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45		
1	4	10	20	35	56	84	120			
1	5	15	35	70	126	210				
1	6	21	56	126	252					
1	7	28	84	210						
1	8	36	120							
1	9	45								
1	10									
1										

Parallelogram Pattern

$$\binom{n}{m} - 1 = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{k}{j}$$

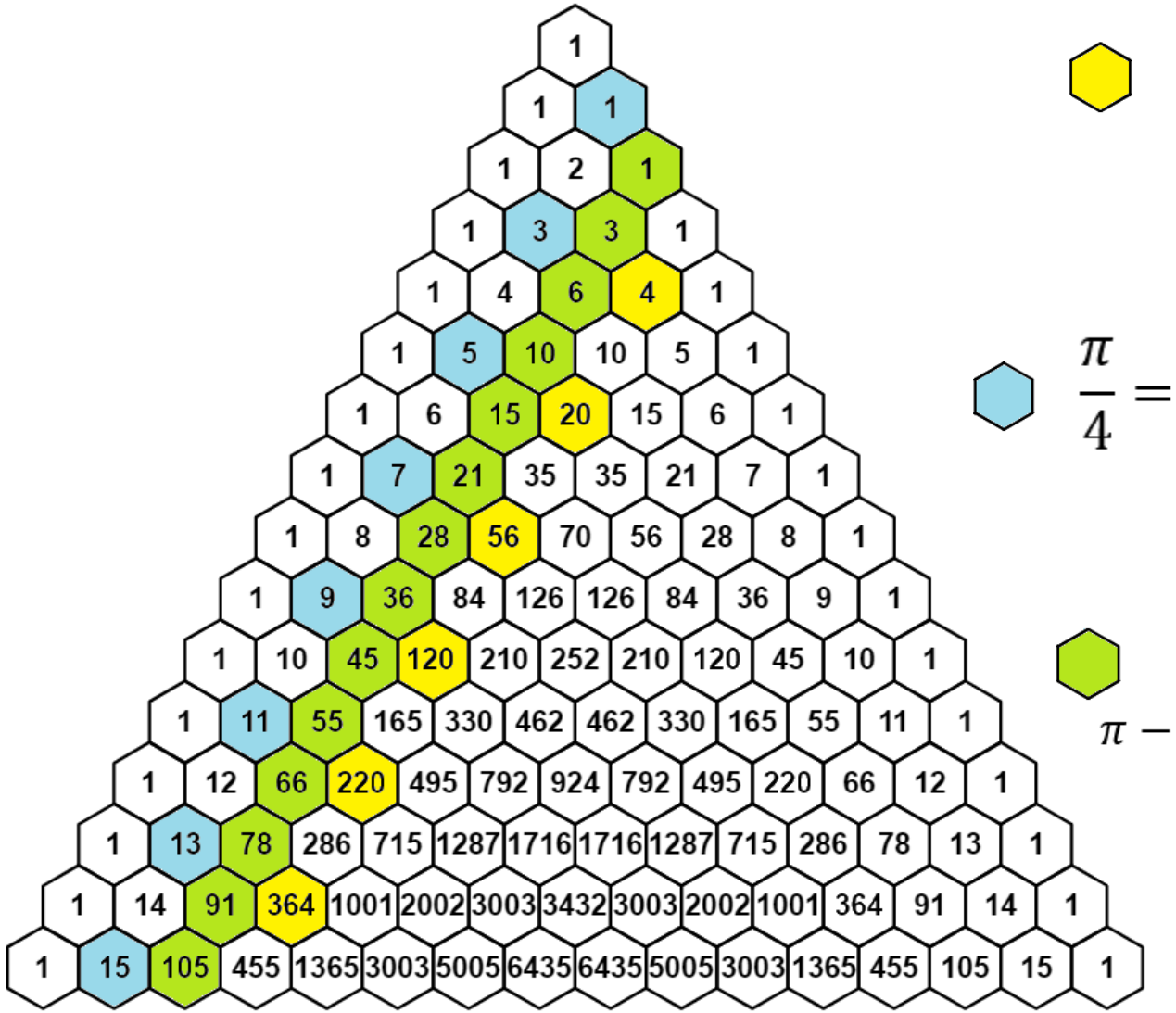
Összefüggések/Tulajdonságok



♖	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

A különböző utak száma, ha csak jobbra és lefelé szabad haladni

Összefüggések/Tulajdonságok

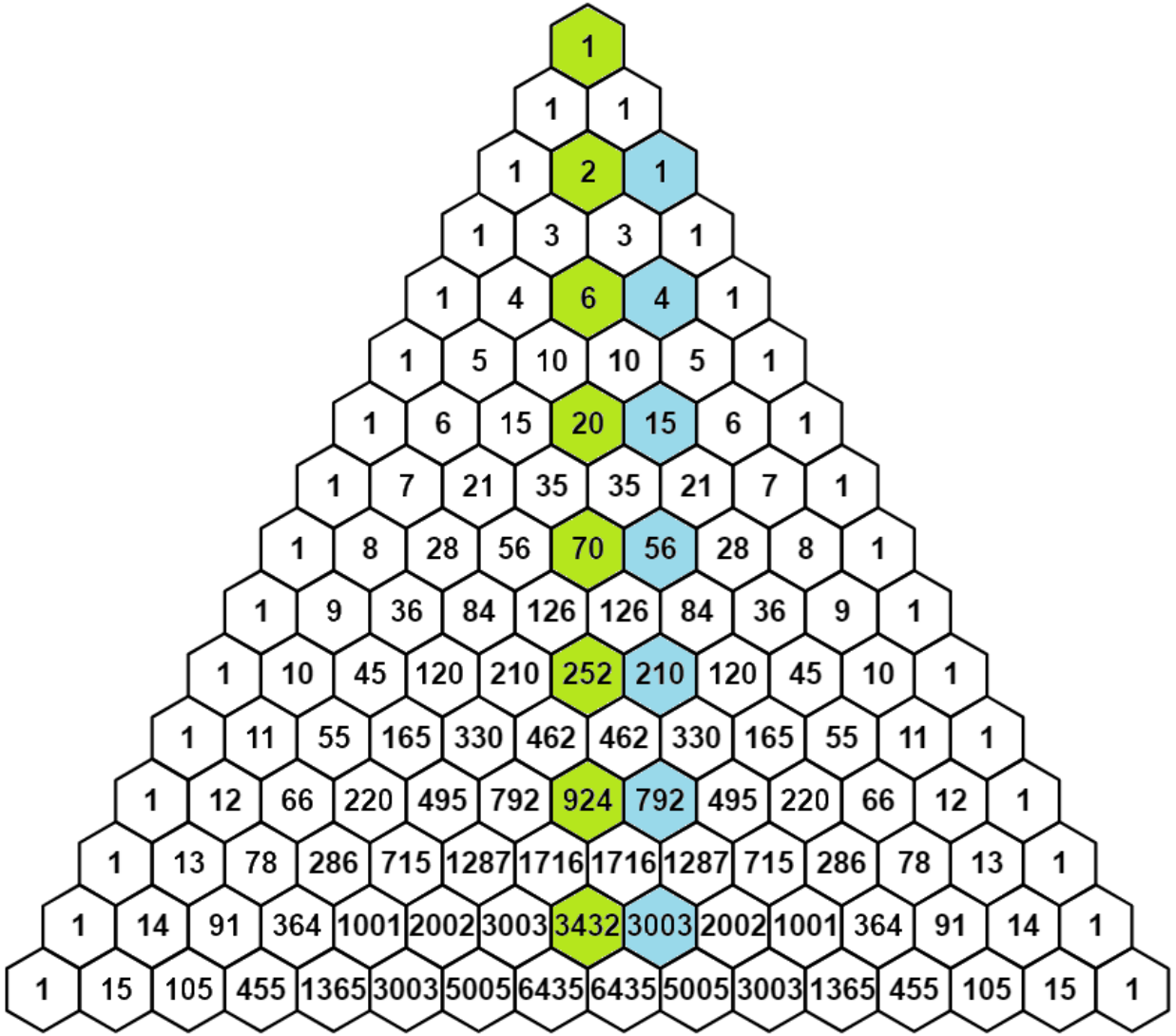


$$\pi = 3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20} + \frac{1}{56} - \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\pi - 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} - \cdots$$

Összefüggések/Tulajdonságok



Catalan-számok

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$$

$C_0=1$	$=1-0$	$=1*1/1$
$C_1=1$	$=2-1$	$=2*1/2$
$C_2=2$	$=6-4$	$=6*1/3$
$C_3=5$	$=20-15$	$=20*1/4$
$C_4=14$	$=70-56$	$=70*1/5$
$C_5=42$	$=252-210$	$=252*1/6$
$C_6=132$	$=924-792$	$=924*1/7$
$C_7=429$	$=3432-3003$	$=3432*1/8$

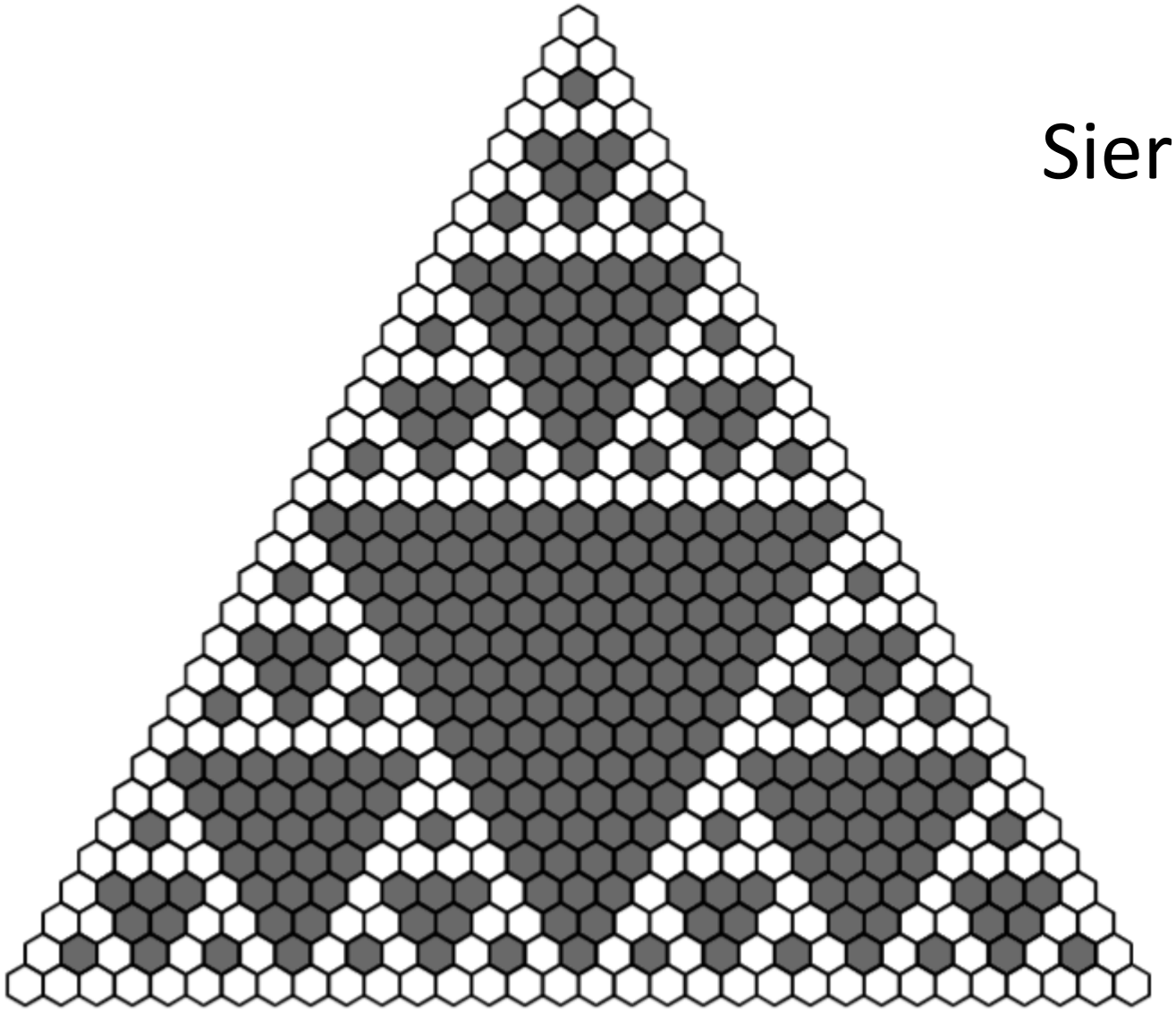
Összefüggések/Tulajdonságok

1		1	
1 1	$11_2=$	3	prím
1 0 1	$101_2=$	5	prím
1 1 1 1	$1111_2=$	15	3*5
1 0 0 0 1		17	prím
1 1 0 0 1 1		51	17*3
1 0 1 0 1 0 1		85	17*5
1 1 1 1 1 1 1 1		255	17*15
1 0 0 0 0 0 0 0 1		257	prím
1 1 0 0 0 0 0 0 1 1		771	257*3

Fermat-számok

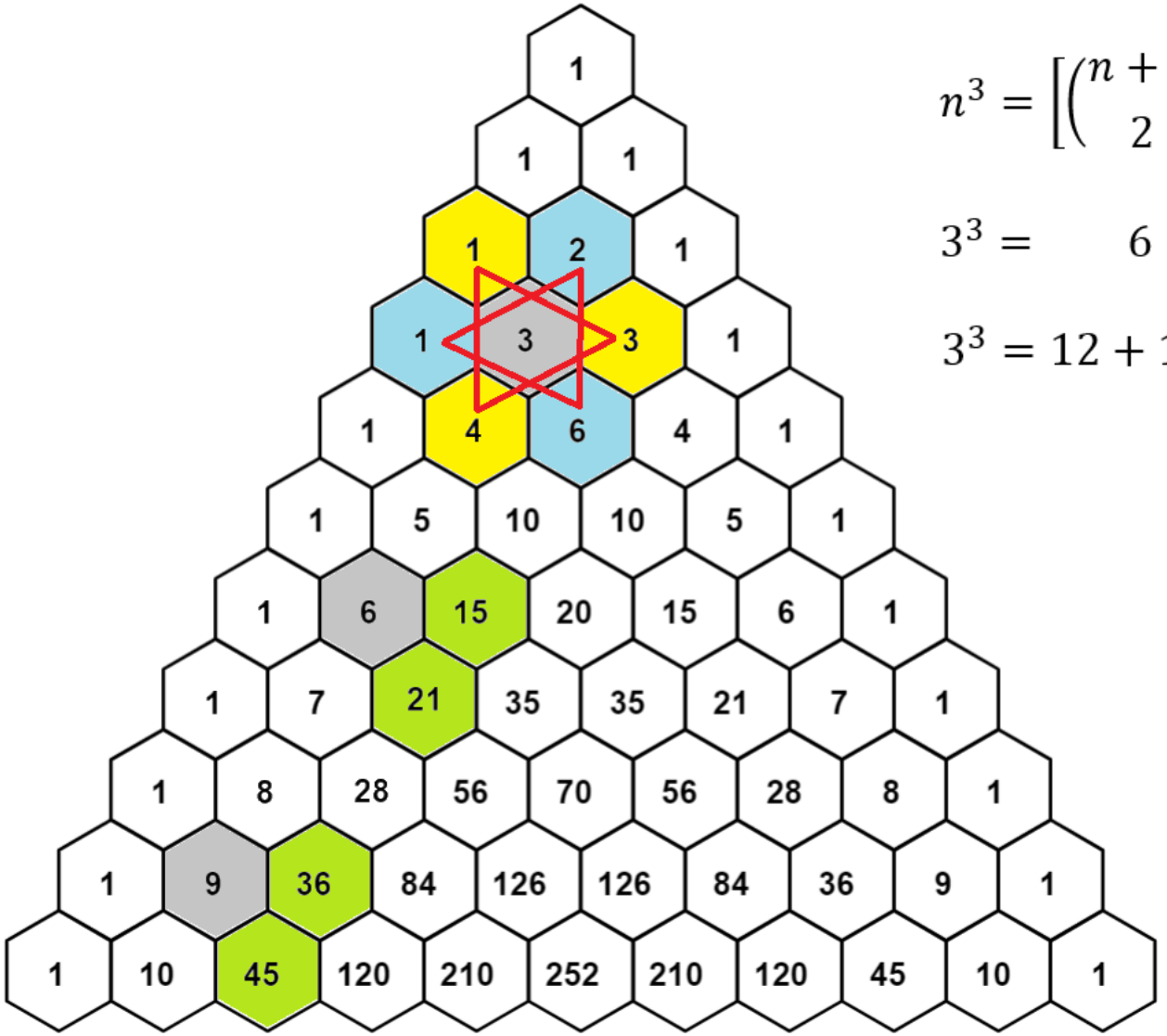
$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Összefüggések/Tulajdonságok



Sierpinski háromszög

Összefüggések/Tulajdonságok



$$n^3 = \left[\binom{n+1}{2} * \binom{n-1}{1} * \binom{n}{0}\right] + \left[\binom{n+1}{1} * \binom{n}{2} * \binom{n-1}{0}\right] + \binom{n}{1}$$

$$3^3 = \quad 6 \quad * \quad 2 \quad * \quad 1 \quad + \quad 4 \quad * \quad 3 \quad * \quad 1 \quad + \quad 3$$

$$3^3 = 12 + 12 + 3 = 27$$

$$n^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$

$$6^2 = 15 + 21 = 36$$

$$9^2 = 36 + 45 = 81$$

További összefüggések

Vandermonde konvolúció: Tetszőleges $k,n,m \in N$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} * \binom{m}{k-1} = \binom{n+m}{k}$$

Tetszőleges $k \in N$ természetes szám esetén létezik egy olyan k+1 –edfokú $P_k(n)$ polinom, amelyre minden $n \in N$ természetes számra teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = P_k(n)$$

összefüggés.

További összefüggések (a teljesség igénye nélkül)

/1/

$$\binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} = n^4$$

/2/

$$1\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

/3/

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$$

/4/

$$1\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

/5/

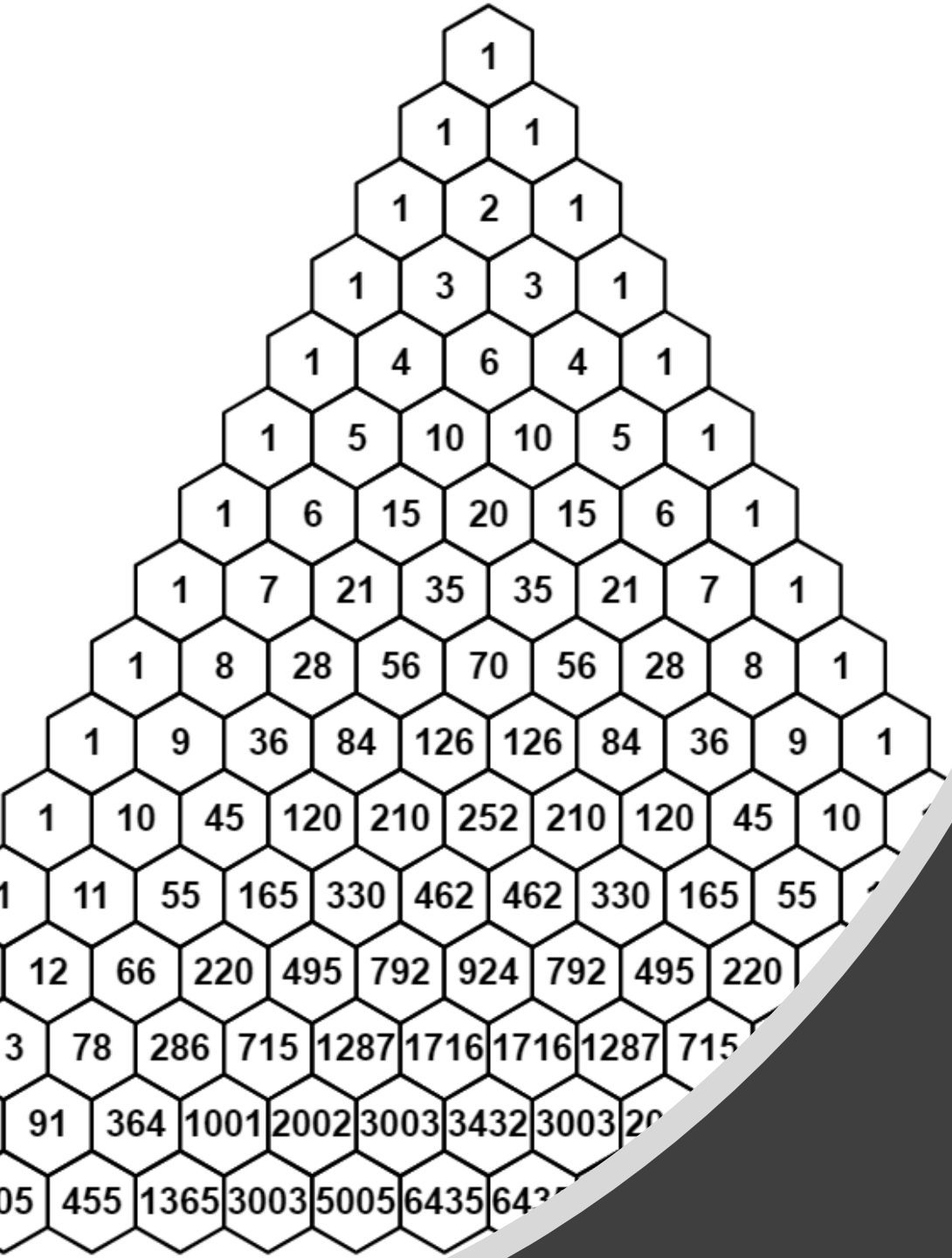
$$\sum_{i=0}^{\infty}(-3)^i\binom{n}{2i} = (-2)^n\cos\frac{2n\pi}{3}$$

További összefüggések

Az előző két dián található képleteket Dr. Szalkai István *„Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai”* című könyvéből írtam ki.

További, binomiális együtthatókra vonatkozó összefüggésekért az alábbi könyvet tudom ajánlani:

Henry W. Gould: *Combinatorial identities;: A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations*



Köszönöm a figyelmet!

Források

https://www.youtube.com/watch?v=0iMtlus-afo

https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/PascalTriangleProperties.shtml

https://www.geogebra.org/m/hcmgsfpu

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle

https://hu.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem

Dr. Szalkai István: Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai

https://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html

https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A1romsz%C3%B6gsz%C3%A1mok

https://en.wikipedia.org/wiki/Trinomial_expansion

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_pyramid