Paradoxonok és hatásuk a matematikára

Tahin Ákos

Mi a paradoxon?

- Mindennapi szóhasználatban: Általában meghökkentő jelenségekre, vagy megoldhatatlannak tűnő dilemmákra használjuk

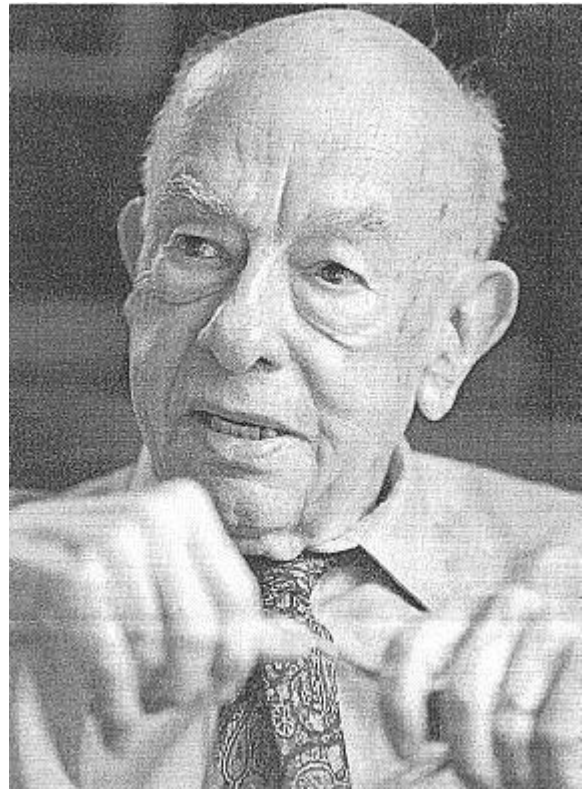
- Matematikában: Olyan állítás mely ellentmondásra vezet vagy a józan észnek ellentmondó következtetés vonható le belőle

- Híres paradoxonok mögötti következtetési hibák és hibás feltételezések tudatosodása számos felfedezéshez vezetett
- Következőkben szó lesz néhány a 20. században megjelent paradoxonról, és hatásukról a matematika változására

Paradoxonok típusai

- 1961-ben Williard Van Orman Quine(1908-2000) amerikai filozófus 3 csoportba sorolta be őket

- 1)Falsidical (hamis) paradoxon
- 2)Veridical (igaz) paradoxon
- 3)Antimony (ellentmondás)



Hamis paradoxonok

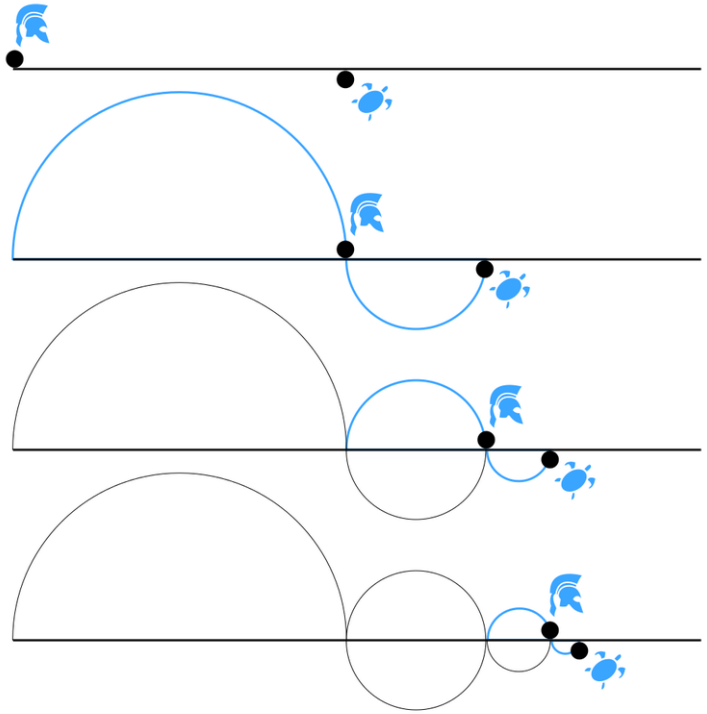
- Egy olyan állítás mely hamisnak tűnik, és valójában is hamis, mert hiba csúszott bele, vagy alapból nem volt ellentmondás
- Például: legyen a=b

$$
\begin{aligned}
\text{akkor } a^2 &= ab && /-b^2 \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && /\text{kiemelés} \\
(a+b)(a-b) &= b(a-b) && / : (a-b) \\
a+b &= b && /a=b \\
b+b &= b \\
2b &= b \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

Hamis paradoxon

- Kr.e. 5.század Zeno of Elea görög filozófus:
- Achilles és a teknős

Achilles és egy teknős versenyt futnak, de a teknős 100méter előnyt kap indulásnál. Tegyük fel hogy mindkét fél ezután elkezd futni ugyanabba az irányba egy konstant sebességgel. Ekkor véges időn belül Achilles el fog érni a teknős kiindulási pontjára, de addigra a teknős valamennyit haladt előre. Így Achillesnek megint időbe fog telni hogy elérje a teknős következő kiindulási pontját. Ez a végtelenségig fog haladni, mivel mire Achilles eléri a teknős előző kiindulási pontját, addigra az mindig haladt előre valamennyit.



Hamis paradoxon

- Mindkét példa hamisnak tűnik, de nem tudjuk bizonyítani, ezért paradoxonok.
- Hiba az elsőben: nem oszthatunk (a-b)-vel, mivel a=b tehát nullával osztanánk
- Hiba a másodikban: egy végtelen számsorozatot össze lehet adni véges értékké, konvergencia (Zeno nem ismerte)

legyen $a=b$

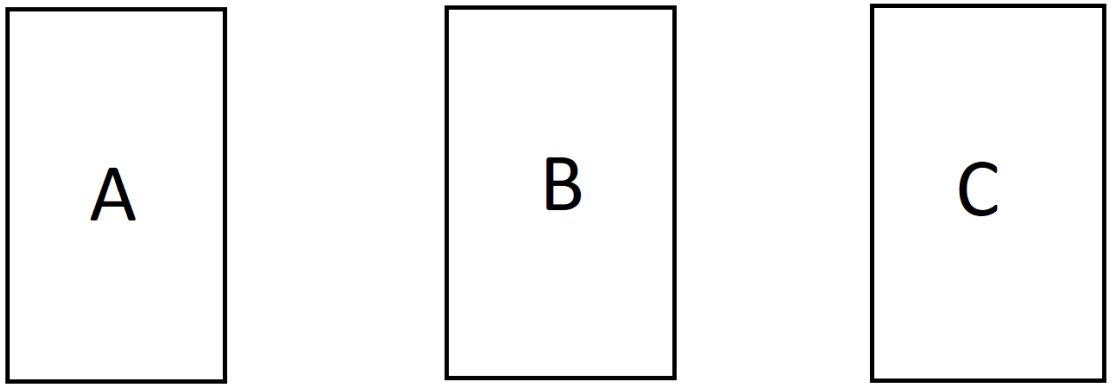
akkor $a^2=ab$	$/-b^2$
$a^2 - b^2 = ab-b^2$	/kiemelés
$(a+b)(a-b) = b(a-b)$	$/ : (a-b)$
$a+b = b$	$/a=b$
$b+b = b$	
$2b = b$	
$2 = 1$	

Igaz paradoxon

- Olyan eredmény mely elsőre abszurdnak tűnik, de bizonyítható hogy mégis igaz
- Monty-Hall paradoxon:

Egy játékműsorban a résztvevő 3 ajtó közül választ. 1 ajtó mögött 1 millió forint van, a másik kettő mögött semmi. Választania kell egy ajtót, de miután választott a játékvezető kinyit egy üres ajtót, azok közül amit nem választottak és ekkor van lehetősége a játékosnak megváltoztatni a döntését. A kérdés hogy megéri-e cserélni?

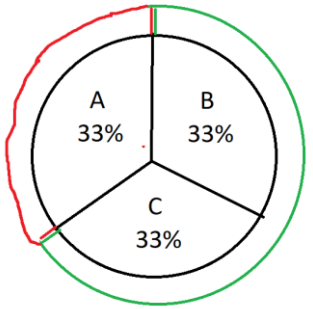
Monty-Hall paradoxon



Választjuk például az A ajtót, a játékvezető kinyitja a C ajtót és megmutatja hogy nem volt mögötte semmi. Lehetőségünk van a választásunkat megváltoztatni B-re, vagy megmaradni A-nál.

Elsőre úgy tűnik hogy mindegy hogy cserélünk-e A-ról B-re vagy sem. **A helyes válasz viszont hogy mindig cserélni kell.**
Magyarázat: az első választásnál 2 rossz lehetőség van, azaz 33% eséllyel lesz választásunk jó, a másodiknál viszont már csak 1 rossz választás van ezért úgy tűnik mintha az esélyeink 50-50re ugrottak volna

Igazából viszont ha egyszer kiválasztunk egyet (piros körvonal), utána mivel meg lesz mutatva egy rossz válasz, ha változtatunk a döntésünkön akkor azzal átlépünk a másik kettő választás halmazába, azaz olyan mintha 66% esélyünk lett volna (zöld körvonal)

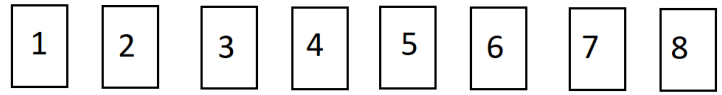


David Hilbert

- 1863-1943 Németország
- Kiemelkedő matematikus
- Geometria axiomatizálása
- Hilbert-féle Grand-Hotel paradoxon

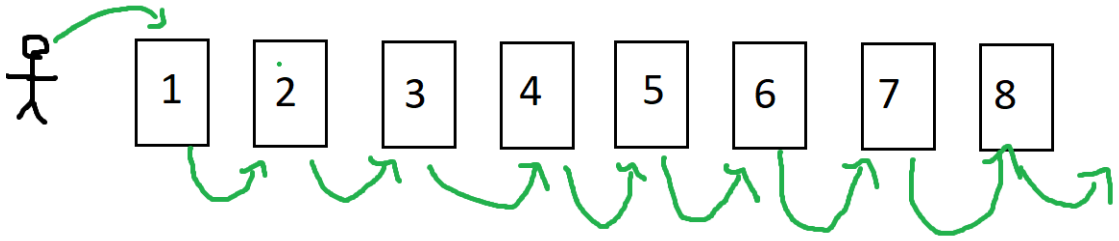


Hilbert Grand-Hotel paradoxon



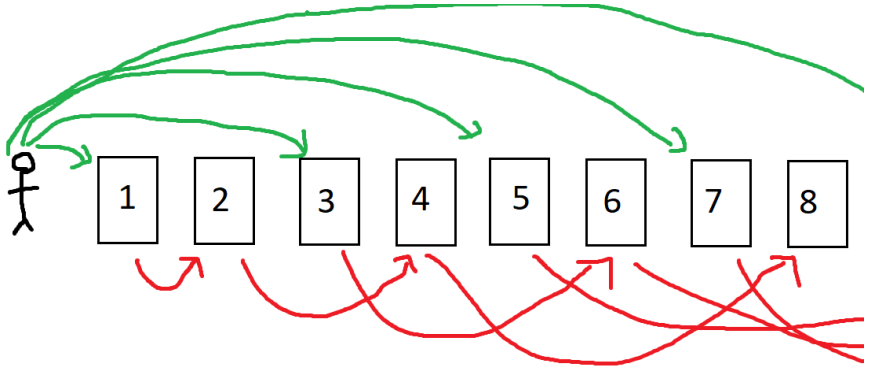
Képzeljünk el egy végtelen szobával rendelkező szállodát, melyek számozva vannak folyamatosan 1-től növekedve. Tegyük fel hogy az összes szoba megtelt. A kérdés az hogy ha jön még egy vendég, el kell-e küldeni. A meglepő válasz az hogy nem.

Az új vendég elhelyezéséhez annyit kell csak tenni, hogy minden vendéget átköltöztetünk az egyel nagyobb számú szobába. Így a legelső szoba üresen marad, ahova új vendégünket szállásholhatjuk.



De tegyük fel hogy érkezik egy busz (számozott ülésekkel) melynek végtelen számú utasa van, és mind szállodánkban akar megszállni.

Ekkor annyit kell tenni hogy minden régi vendéget átköltöztetünk az övénél 2x-es számú szobába, ezzel minden páratlan szám felszabadul. Ezekbe a páratlan számú szobákba sorba elhelyezhetjük az újabb végtelen számú vendégeket. Válasz elsőre megdöbbentő, de mégis igaz -> igaz paradoxon



Ellentmondás

- Az ellentmondás olyan eredményre jut érvényes és elfogadható érveléssel vagy gondolkodással, mely saját magának mond ellent
- Matematikában: olyan állítás mely igaz, és a tagadása is igaz

- Nagypapa paradoxon

Visszamegyünk az időben és a nagypapánkat eltesszük láb allól

- „Ez a mondat nem igaz” - a mondat nem lehet se igaz se hamis

Paradoxonok megoldása

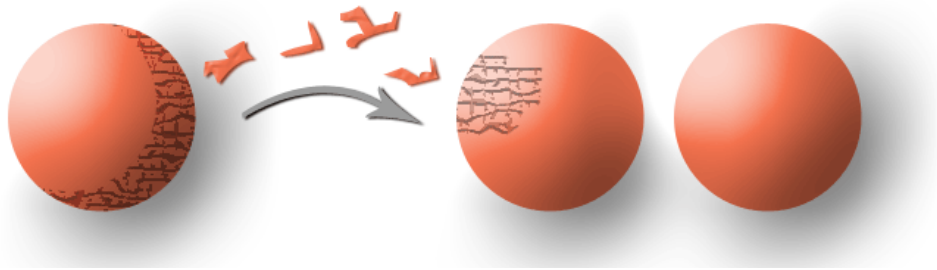
- Minden paradoxon ellentmondásnak indul, és amikor megoldják őket, válnak igaz vagy hamis paradoxonná.
- Zeno számára az Achilles és teknős paradoxon az ő idejében ellentmondás volt, de többezer évvel később számunkra már egy hamis paradoxon
- A 20. századi matematikai logika fejlődésére nagy hatással voltak előző (elsősorban 19.század) paradoxonjai

Alfred Tarski

- 1901-1983 lengyel matematikus
- Szimbolikus logika, logikai szemantika és nyelvfilózófia téren korszakalkotó
- Banach-Tarski-paradoxon



Banach–Tarski-paradoxon



- Egy 3 dimenziós gömböt fel lehet vágni véges sok olyan nem mérhető darabra melyekből két az eredeti gömbbel megegyező méretű tömör gömböt lehet összeállítani
- Bizonyítható matematikailag

páros számok {2,4,6,8...} => ∞ darabszám: végtelen

egész számok {1,2,3,4...} => ∞ darabszáma: végtelen

páratlan számok {1,3,5,7...} => ∞ darabszám: végtelen

Megoldás: való életben nem lehet egy gömböt nem mérhető darabokra felbontani

Bertrand Russell

- 1872-1970 angol matematikus
- A századfordulón jelentkező paradoxonok hatására segített a matematikát szilárd alapokra helyezni
- Russell-paradoxon



Russell-paradoxon

- S halmaz tartalmazkodó ha S∈S, az állítás vagy igaz vagy hamis
- Legyen R olyan halmaz melynek S pontosan akkor eleme ha S nem tartalmazkodó formulával: $\forall S\ (S \in R\ \leftrightarrow S \notin S)$
- Ha valami minden S halmazra igaz, akkor igaz az S = R halmazra is, de ha S = R akkor az egyenletünk:

$$R \in R\ \leftrightarrow R \notin R$$ ami paradoxon

Ebből egyszerűen bizonyítható hogy egy matematikai elméletben melyben a matematikai hagyományos eszközeivel egy ellentmondást le lehet vezetni, minden levezethető tétel tagadása is levezethető, így nem ér túl sokat

Az az „bármi és egyúttal bárminek az ellenkezője is bizonyítható”

Látva hogy egy ilyen alapvető műveletekkel rendelkező állításban is lehet paradoxon, társaival Russell átdolgozták és szilárdabb alapokra helyezték a matematikát

Kurt Gödel

- 1906-1978 Osztrák matematikus
- 1931 Első nemteljességi tétel:

Minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó, formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható.



Források

- https://hu.wikipedia.org/wiki/Paradoxon
- https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradoxes
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon
- https://hu.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tarski
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

Köszönöm a filgyemet!