Nemeuklideszi geometria

Szemelvények a matematika történetéből, 2020. tavasz

Haász Menno, RFXI2U

Tartalom

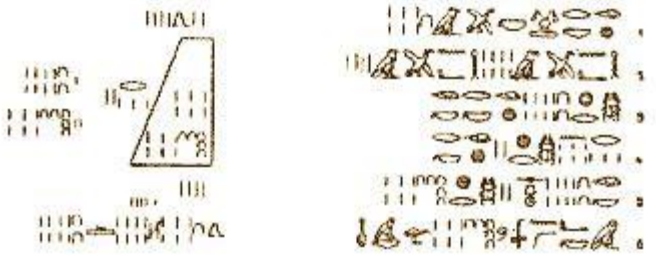
- Geometria
- Euklidész és könyvei
- Posztulátumok
- Az 5. posztulátum története
- Nemeuklideszi geometria megszületése

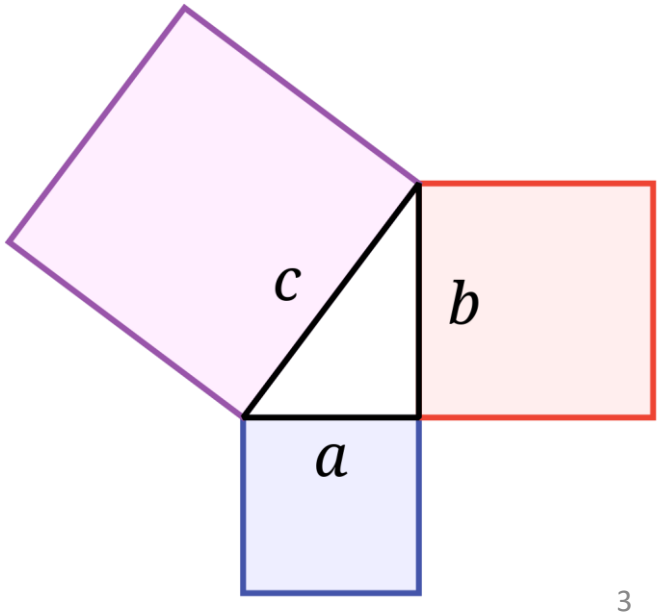


Korai geometria



- i.e. 3000 környékéről már vannak fennmaradt bizonyítékok
- Egyiptom, Babilon, Indus völgy, India, Görögország
- Hosszok, területek, szögek
- Bonyolultabb dolgok is (i.e. 1500 Pitagorasz tétel!)
- Thalész, Platón





Euklidész

- i.e. 300 körül, görög
- Matematikus
- Elemek
  - 13 könyv (fejezet)
  - 2. legtöbbször kiadott könyv
  - Egy műbe összegyűjtve és rendezve az addigi geometriai ismeretek
  - Geometria alapjainak lefektetése
  - Tételek, bizonyítások



Definíciók

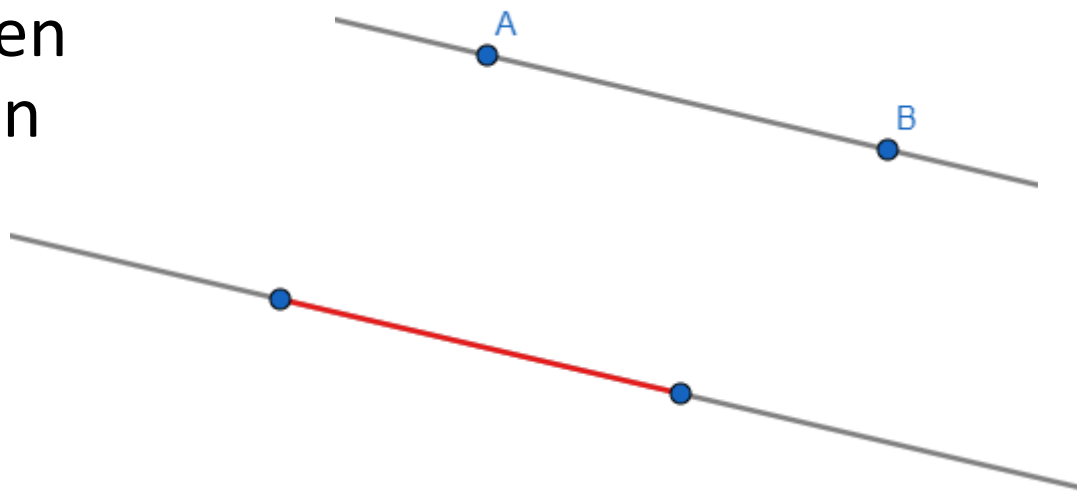
1. Pont az, aminek nincs része.
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egyenes vonal az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
5. A felület végei (=szélei) vonalak.
6. Síkfelület az, amelyik a rajta lévő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
7. (… összesen 23)

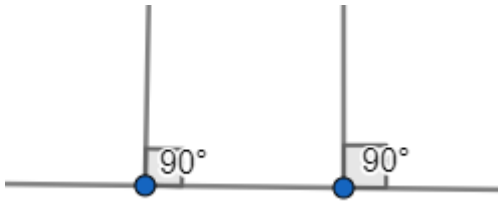
Axiómák

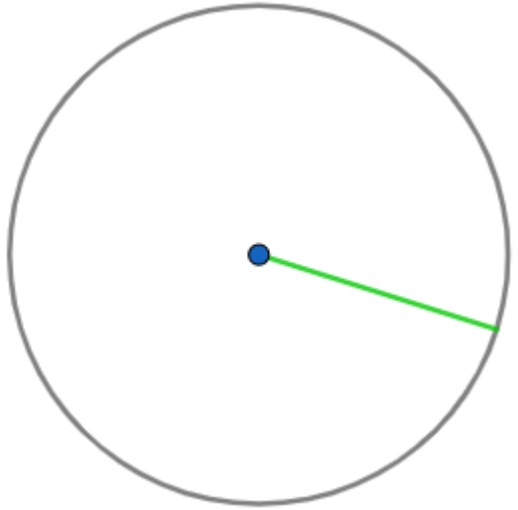
1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
8. Az egész nagyobb a résznél.
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.

Posztulátumok

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.
2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.
3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.
4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

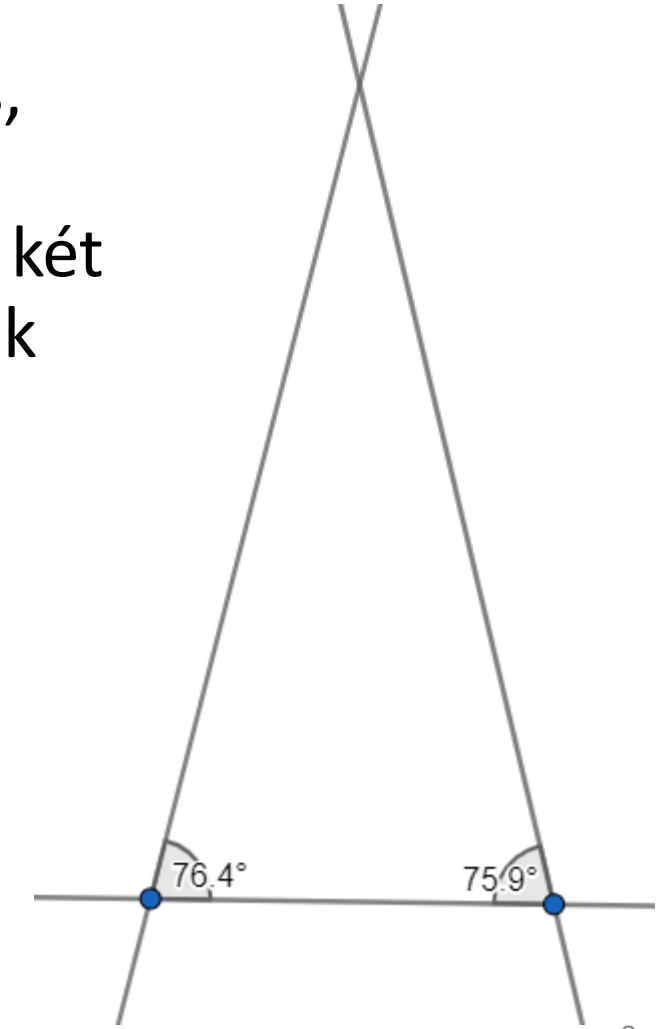






Az ötödik posztulátum (párhuzamossági axióma)

5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.



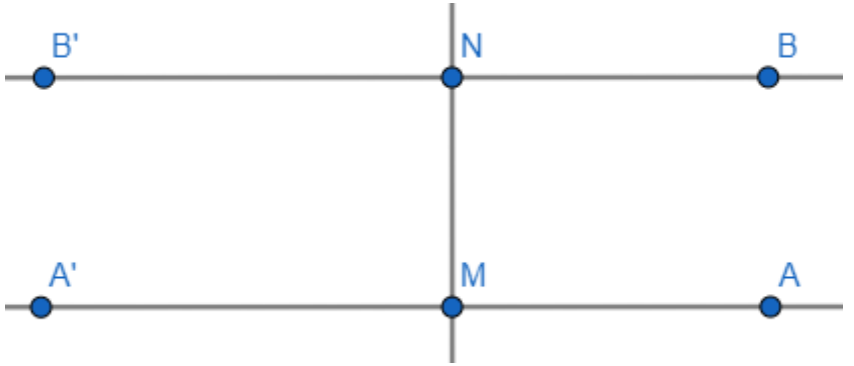
Ötödik posztulátumot helyettesítő állítások

- Legfeljebb egy párhuzamos egyenes húzható egy másik egyenessel egy ponton át. (Playfair axiómája)
- Egy háromszög belső szögeinek összege 180°. (háromszög posztulátum)
- Nincs felső határa egy háromszög lehetséges területének. (Wallis axióma)
- Tetszőleges derékszögű háromszögben a befogók fölé írt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogó fölé írt négyzet területével. (Pitagorasz-tétel)

Harc az ötödik posztulátum ellen I.



- Ptolemaiosz (85 körül - 168, Egyiptom, római állampolgár)
- Matematikus, csillagász, geográfus, asztrológus, költő
- Az első híresebb kísérlet az 5. posztulátum bizonyítására (Tractate on Fifth Postulate, 150)
- Két módon is
- Feltételezte a háromszögek belső szögösszegét

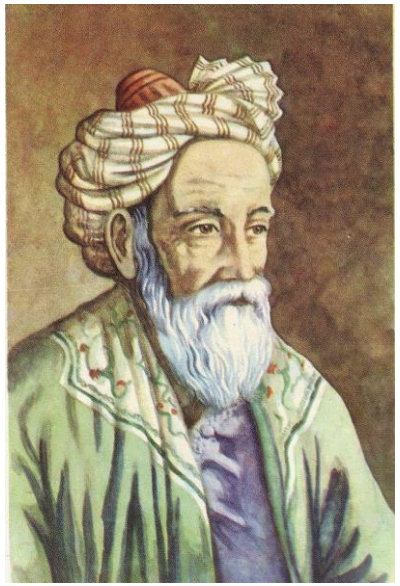


Harc az ötödik posztulátum ellen II.

- Proclus (410-485, görög): rossz bizonyítás
- Ḥasan Ibn al-Haytham (965-1040, arab): rossz bizonyítás
- Omar Khayyám (1050–1123, perzsa): rossz bizonyítás
- (…)





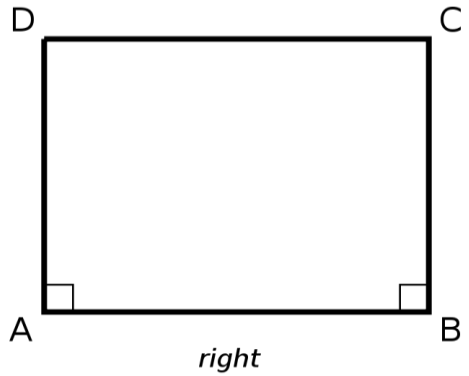


Harc az ötödik posztulátum ellen III.

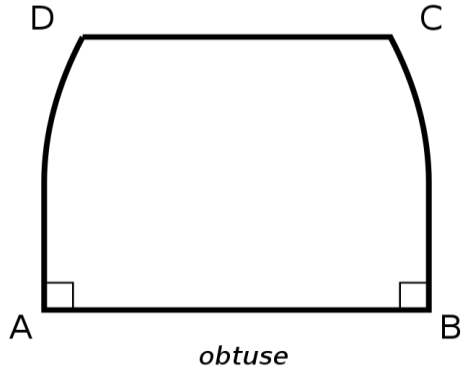
- Girlamo Saccheri (1667-1733, olasz)
  - Bizonyítani próbálta az 5. posztulátumot
  - Khayyam–Saccheri négyszög (2 db szomszédos 90°-os szög)

- Johann Lambert (1728-1777, svájci)
  - Bizonyítani akarta az 5. posztulátumot
  - Lambert négyszög (3 db 90°-os szög)
  - Nem publikálta a próbálkozásait, megállt

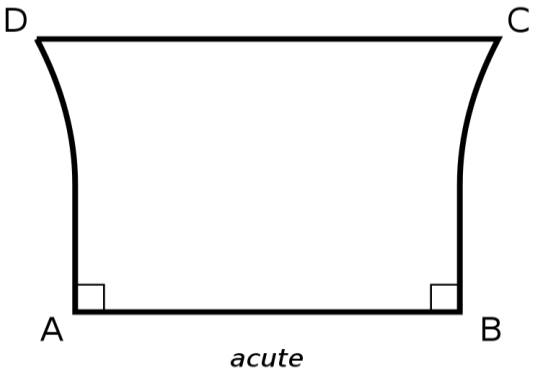




right



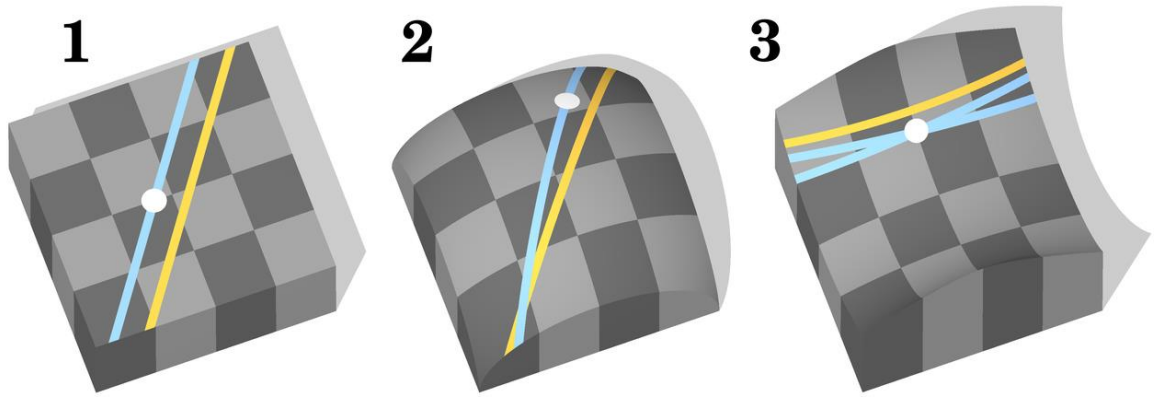
obtuse



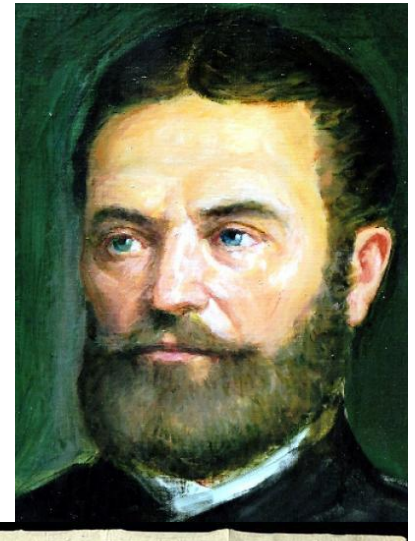
acute

Nemeuklideszi geometria megszületése

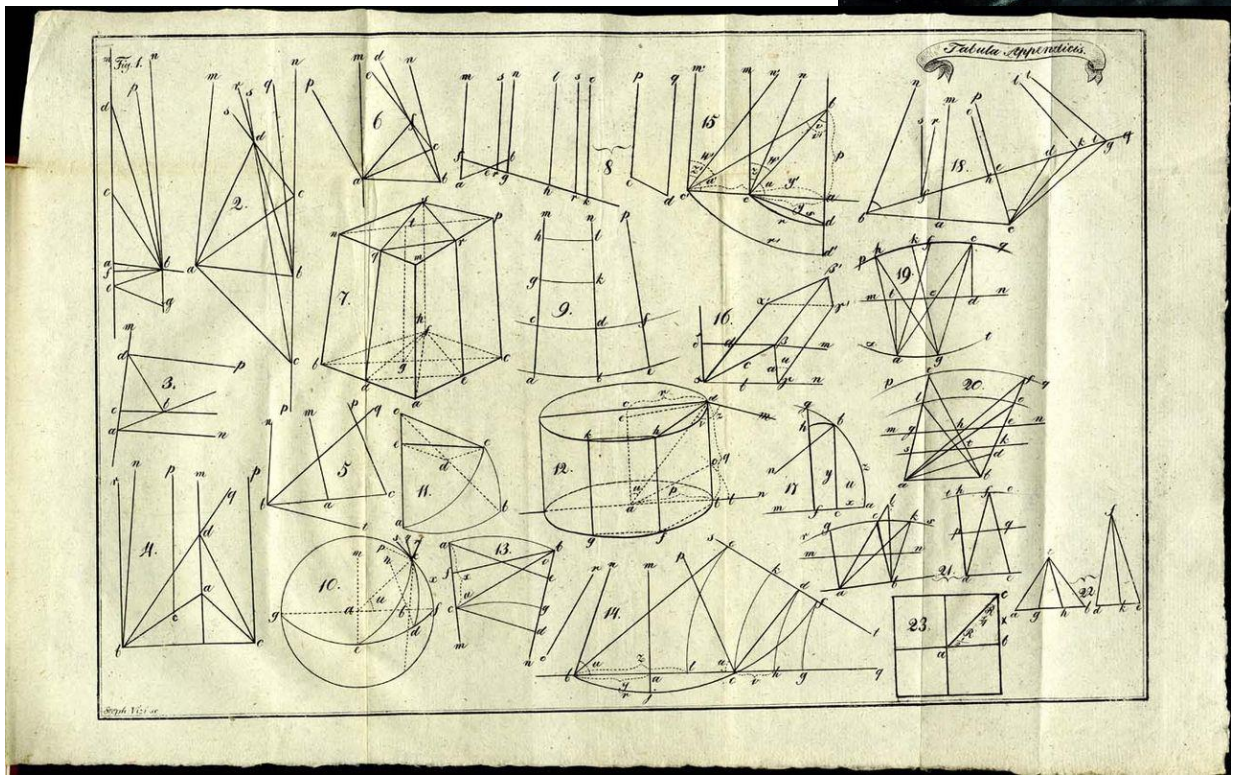
- XIX. század eleje
- Bólyai János, Lobachevsky, Gauss
- Az első esetek az 5. posztulátum meg nem kérdőjelzése mentén
- Posztulátumok elhagyása, módosítása
- Parabolikus, elliptikus, hiperbolikus, (…)
- 2000 év után az 5. posztulátum szükségességének bizonyítása (az eddig ismert sík, Euklideszi geometria esetén)



Bólyai János



- 1802 (Kolozsvár) – 1860 (Marosvásárhely)
- Bólyai Farkas fia
- Számelmélet, komplex számok, geometria
- 1820-1823: nemeuklideszi geometria kidolgozása
- Hiperbolikus geometria
- 1832: Appendix



Párhuzamos megalkotók

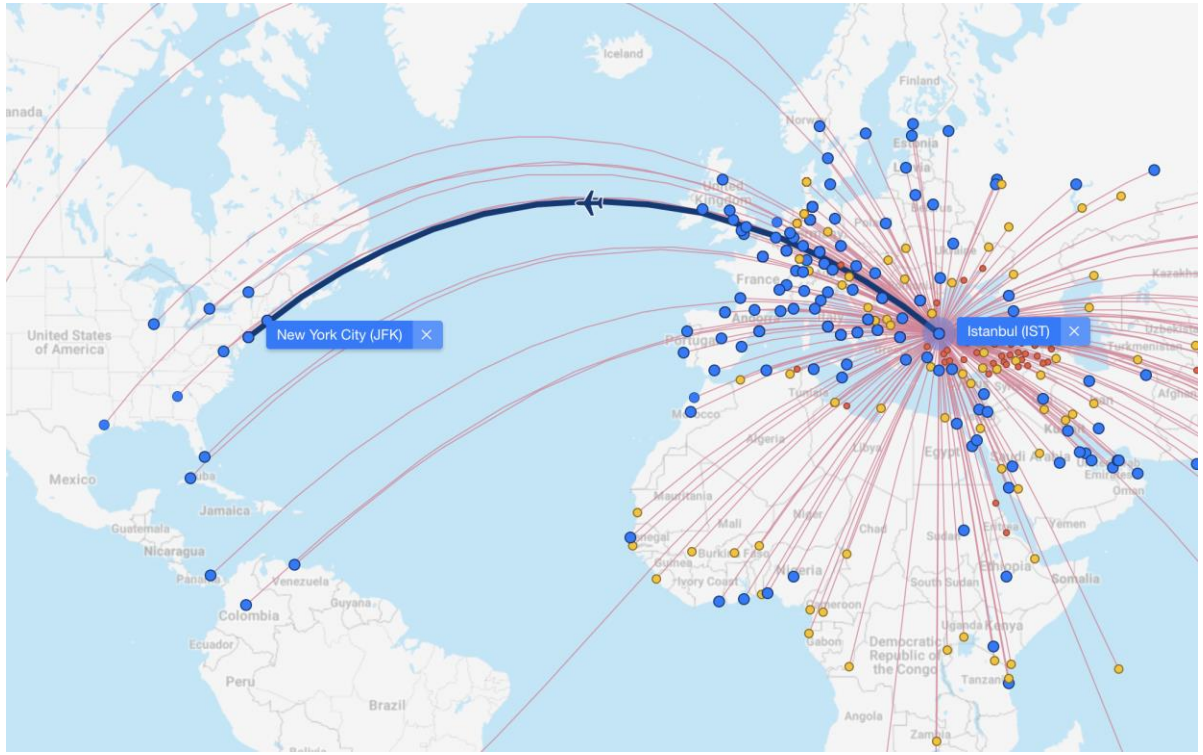
- Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856, orosz)
  - Párhuzamosan találta fel (1829), főleg hiperbolikus geometria
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855, német)
  - Állítólag Bólyai előtt feltalálta más, csak nem publikálta
- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866, német)
  - Gömbi geometria is egy elliptikus geometria
- Eugenio Beltrami (1835-1900, olasz)
  - 1868: véglegesen bebizonyította az 5. posztulátum szükségességét sík geometria esetén





Felhasználás

- XX. században már nagyon elterjedtek a nemeuklideszi geometriák
- Földrajz (gömbi geometria)
- Kozmológia
- Relativitás elmélet (hiperbolikus geometria)
- Asztronómia (hiperbolikus geometria)



Források

- A FIZIKA KULTÚRTÖRTÉNETE - Simonyi Károly, GONDOLAT, 1978
- Elemek - Euklidész, Mayer Gyula fordítása, GONDOLAT, 1983
- https://en.wikipedia.org/wiki/Non-Euclidean_geometry
- https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate
- The History of Non-Euclidean Geometry – Extra Credits, YouTube
- https://cs.appstate.edu/~sjg/class/3010/final/ederson1.pdf
- Theories of Parallelism: An Historical Critique - W.B. Frankland, Cambridge: University Press, 1910

Köszönöm a figyelmet!