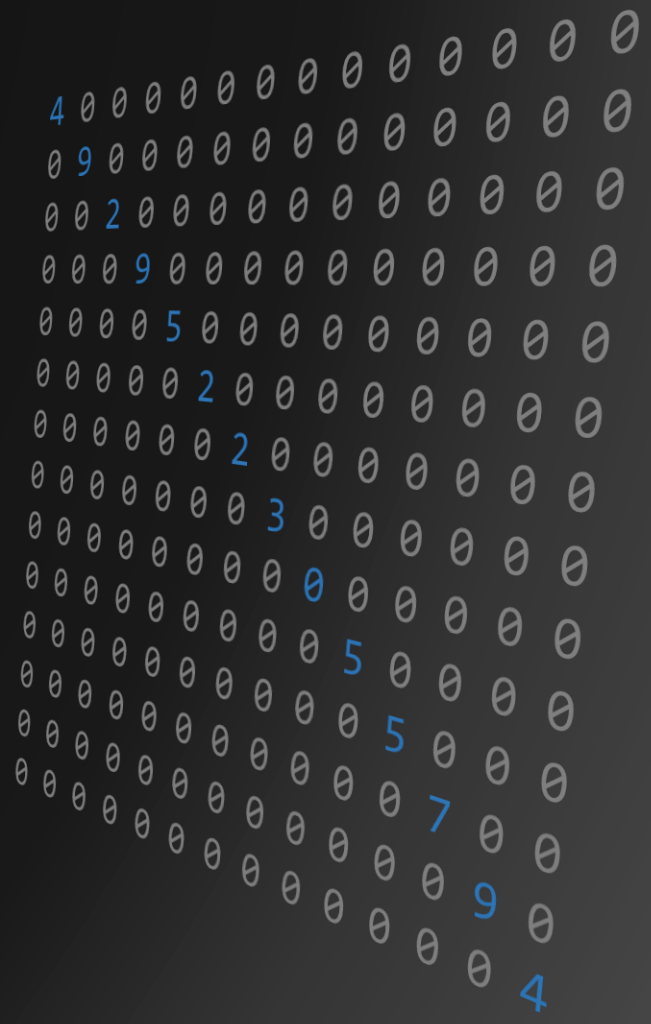
Mátrixok

fejlődése és alkalmazásai

Készítette: Dvorszky Dávid László



Tartalom

- Történelem
- Matematikai használat
- Számítástechnikai használat

- Történelem
  - A mátrixok megjelenése
  - Determináns
- Matematikai használat
- Számítástechnikai használat

A mátrixok megjelenése
Babilónia

- Időszámításunk előtti IV. - II. század
- Lineáris egyenletrendszerek
  - *Van két szántóföld, melyeknek a teljes területe 1800 négyzetméter. Az egyik 2/3 véka gabonát termel négyzetméterenként, míg a másik 1/2 véka gabonát termel négyzetméterenként. Ha az összes termelés 1100 véka, mekkorák a termőföldek?*

A mátrixok megjelenése
Kína

- A matematika művészetének 9 fejezete
  - Legkorábbi ismert könyv 179-ben készült
  - Korábbi változatok más címmel már az ie. II. században is
- Hasonló probléma a babilonihoz
  - Feladatmegoldás
  - Mátrixhoz hasonló felírás megjelenése
  - Van három féle gabona, melyekből 3 köteg az elsőből, 2 a másodikból, és 1 a harmadikból 39 egységet ad. 2 az elsőből, 3 a másodikból, és 1 a harmadikból 34 egységet ad. És 1 az elsőből, 2 a másodikból és 3 a harmadikból 26 egységet ad. Hány egység gabonát tartalmaz 1-1 köteg a különböző gabonákból?

A szerző megoldása

- 3 lineáris egyenlet
  - 3 ismeretlen
  - „számoló tábla”
  - 1 2 3
    2 3 2
    3 1 1
    26 34 39

A szerző megoldása

- Szorozzuk meg a középső oszlopot 3-mal, majd vonjuk ki a jobboldalit annyiszor, ahányszor tudjuk
- Ugyan így vonjuk ki a jobb oldali oszlopot ahányszor tudjuk, a bal oldali oszlopból
- Ez alapján:
  - 1 2 3 → 0 0 3
    2 3 2 → 4 5 2
    3 1 1 → 8 1 1
    26 34 39 → 39 24 39

A szerző megoldása

- Következőnek a baloldali oszlopot megszorozzuk 5-tel, majd vonjuk ki belőle a középső oszlopot, ahányszor tudjuk
- Ez alapján:
  - ```
     0  0  3        0  0  3
     4  5  2   →    0  5  2
     8  1  1       36  1  1
    99 24 39       99 24 39
    ```
  - amiből megkapjuk a megoldást a harmadik típusú gabonára, majd a másodikra, majd az elsőre visszahelyettesítés alapján
- Ezt a megoldást ma Gauss eliminációként ismerjük, ami a 19. század elején vált népszerűvé
    ```

Determináns

- „Meghatározott”
- Skalár
- Négyzetes mátrix elemei alapján számoljuk
- A mátrix által leírt lineáris transzformációk tulajdonságait tartalmazza

Determináns

- 1545 - Girolamo **Cardano**[1]
  - Regula de modo
  - 2x2 rendszerek megoldása
- 1683 - Takakazu Shinsuke **Seki**[2]
  - 5x5 mátrix determinánsának kiszámolása
  - Egyenletek megoldása

[1] Olasz doktor és matematikus, 1501-1576. Ars Magna munkájáról ismert, ami az első latin nyelvű tanulmány az algebráról. Harmad- és negyedfokú egyenletek megoldására adott módszert.

[2] Japán matematikus, 1642-1708. Elsőként tanulmányozta a determinánsokat. Már Jacob Bernuilli előtt felfedezte a Bernuilli számokat.

Determináns

- 1693 - Gottfried Wilhelm von **Leibniz**[3]
  - Levél l'Hospital-nak
    - $10+11x+12y=0$
      $20+21x+22y=0$
      $30+31x+32y=0$
    - $10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$
- 1750 - Gabriel **Cramer**[4]
  - n x n
  - Nem bizonyítja

[3] Német matematikus, 1646-1716. Differenciál- és integrálszámításai a mai napig fontosak. A számológép elődjének feltalálója.
[4] Svájci matematikus, 1704-1752. Analízissel és determinánsokkal foglalkozott. Főleg az egyenletrendszerek megoldására írt képletéről ismert.

Determináns

- 1801 - Johann Carl Friedrich **Gauss**[5]
  - Disquisitiones arithmeticae (Számelméleti vizsgálódások)
    - Determináns, mint szó
    - Szorzás, inverz
  - Gauss elimináció[6]

[5] Német matematikus és fizikus, 1777-1855. Számelmélet, analízis, differenciálgeometria, földméréstan, mágneses erő, csillagászat és fénytan területek végzett munkája nagy hatással van számtalan területre.
[6] ”Kiküszöbölés” - változók eltávolítása az egyenletrendszerből összeadással és kivonással, (logikában szorzással és osztással), illetve ezzel az egyenletrendszer megoldása

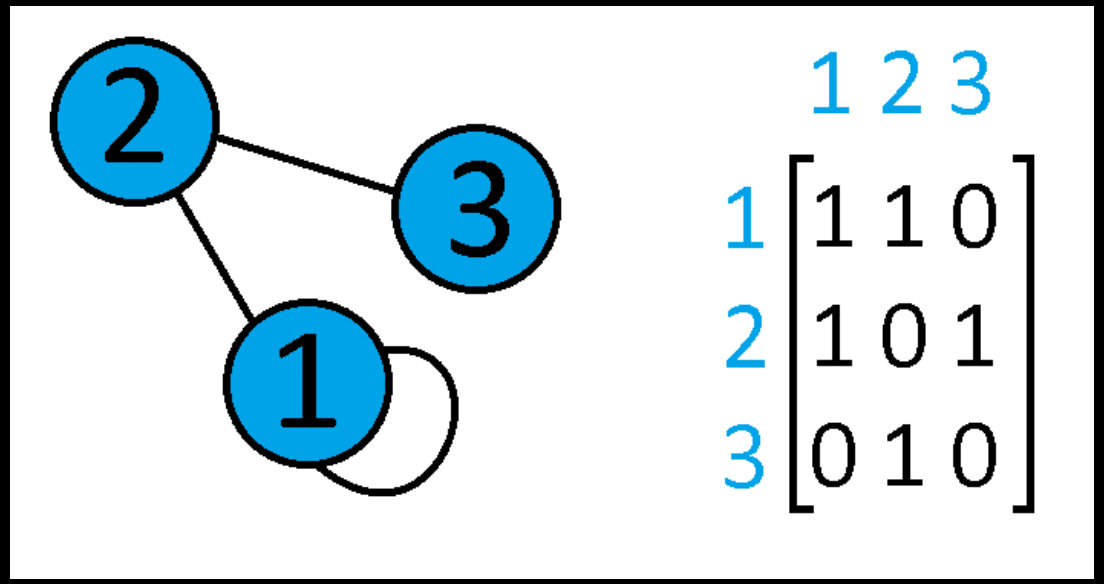
- Történelem
- Matematikai használat
  - Komplex számok
  - Gráfelmélet
  - Egyéb alkalmazások
- Számítástechnikai használat

Komplex számok

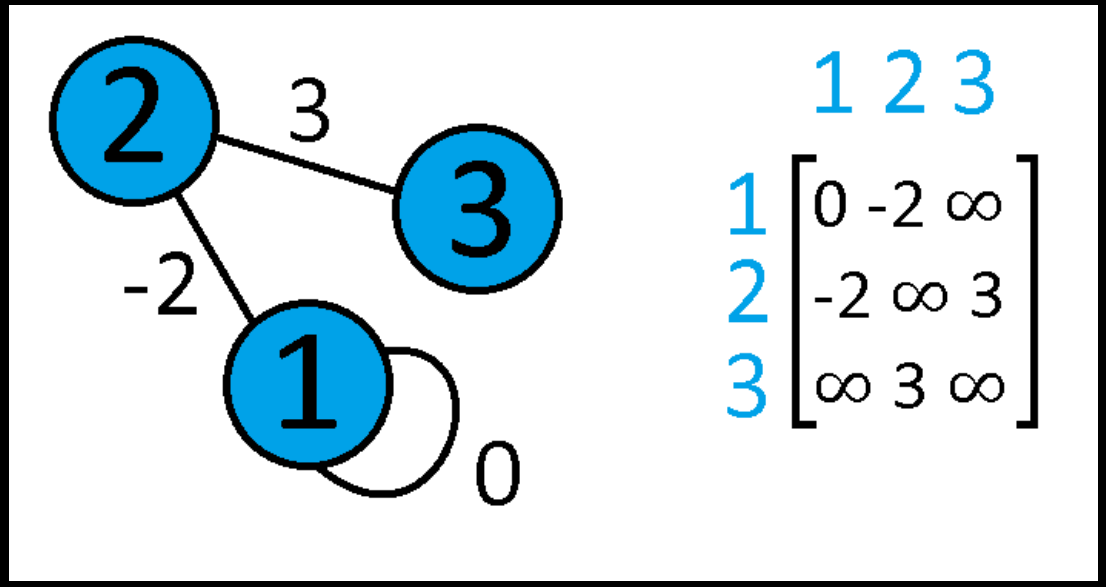
- Általános alak: a + *i*b
- Mátrix alak: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$
- Szorzás hasonlóan működik
  - pl. 2x2-es forgató mátrix = 1 abszolút értékű komplex szám

Gráfelmélet

Szomszédsági mátrix



Távolság mátrix



Gráfelmélet

Tulajdonságok a mátrix alapján

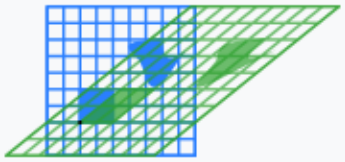
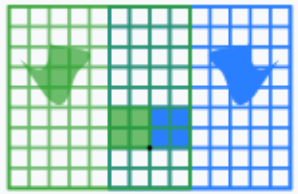
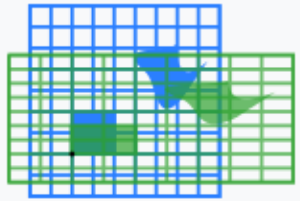
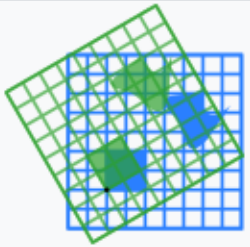
- A gráf nem összefüggő ↔ A gráf csúcsmátrixa sorok és oszlopok cseréjével diagonális mátrixszá alakítható
- Két gráf izomorf ↔ Két gráf csúcsmátrixai sor-oszlop cserékkel azonossá tehetők
- Egy tetszőleges, összefüggő gráf, fokszám- és adjacencia mátrixának különbsége egyenlő a gráf mátrixának bármelyik aldeterminánsával
- Egy gráf spektruma adjacencia mátrixának sajátértékeinek halmaza

Egyéb alkalmazások

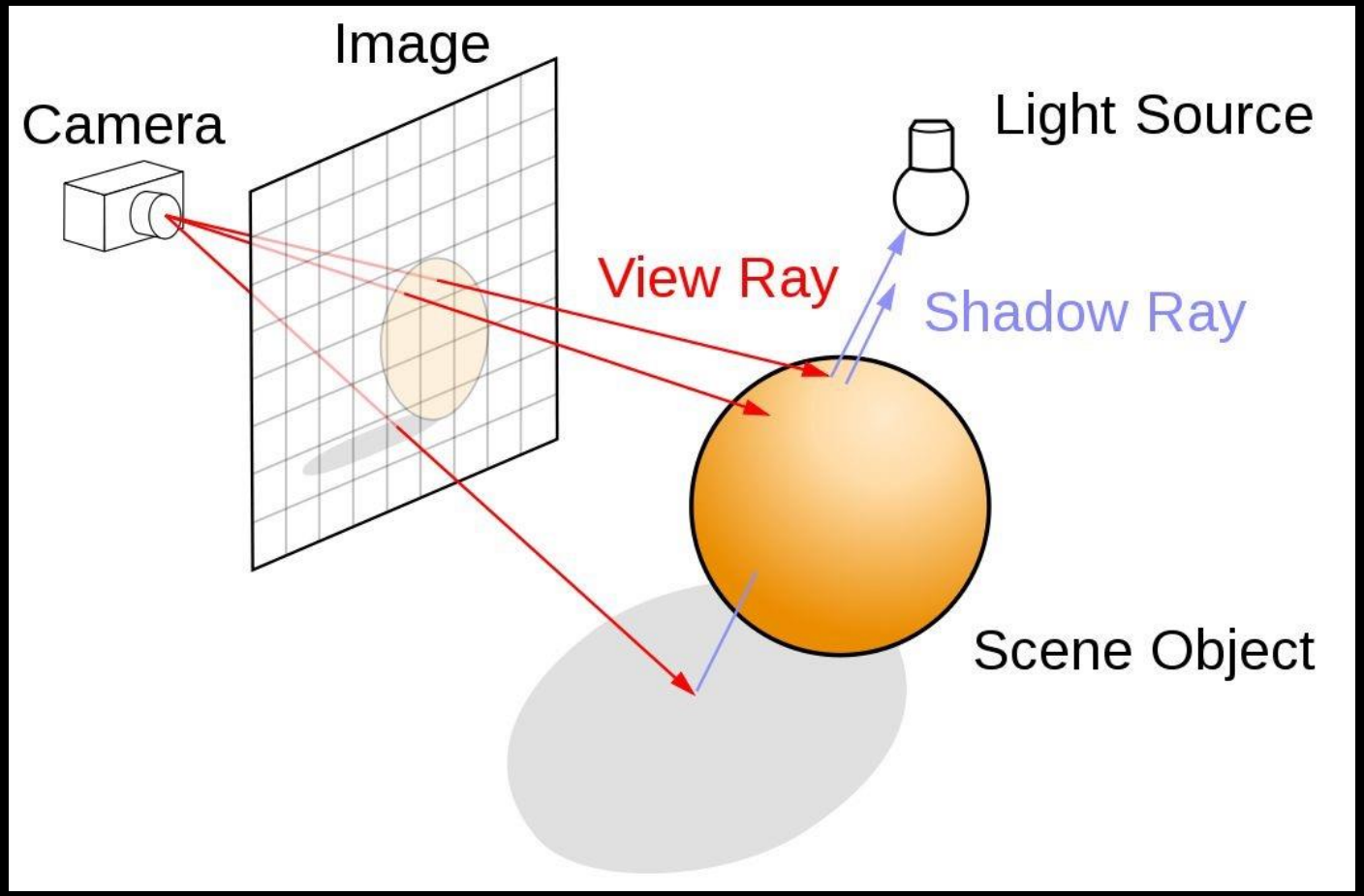
- Valószínűség számítás
  - Sztochasztikus mátrix
  - Kovarianciamátrix
  - Véletlen mátrix
- Fizika
  - Transzformációk
  - Szimmetria
  - Fény viselkedése
  - Elektronikai elemek leírása

- Történelem
- Matematikai használat
- Számítástechnikai használat
  - Grafikus elemek
  - Ajánlórendszerek
  - Képfeldolgozás
  - Gépi tanulás

Grafikus elemek
2 dimenziós műveletek

Horizontal shear with m = 1.25.	Reflection through the vertical axis	Squeeze mapping with r = 3/2	Scaling by a factor of 3/2	Rotation by π/6 = 30°
$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$
				

Grafikus elemek
Ray Tracing



Ajánlórendszerek

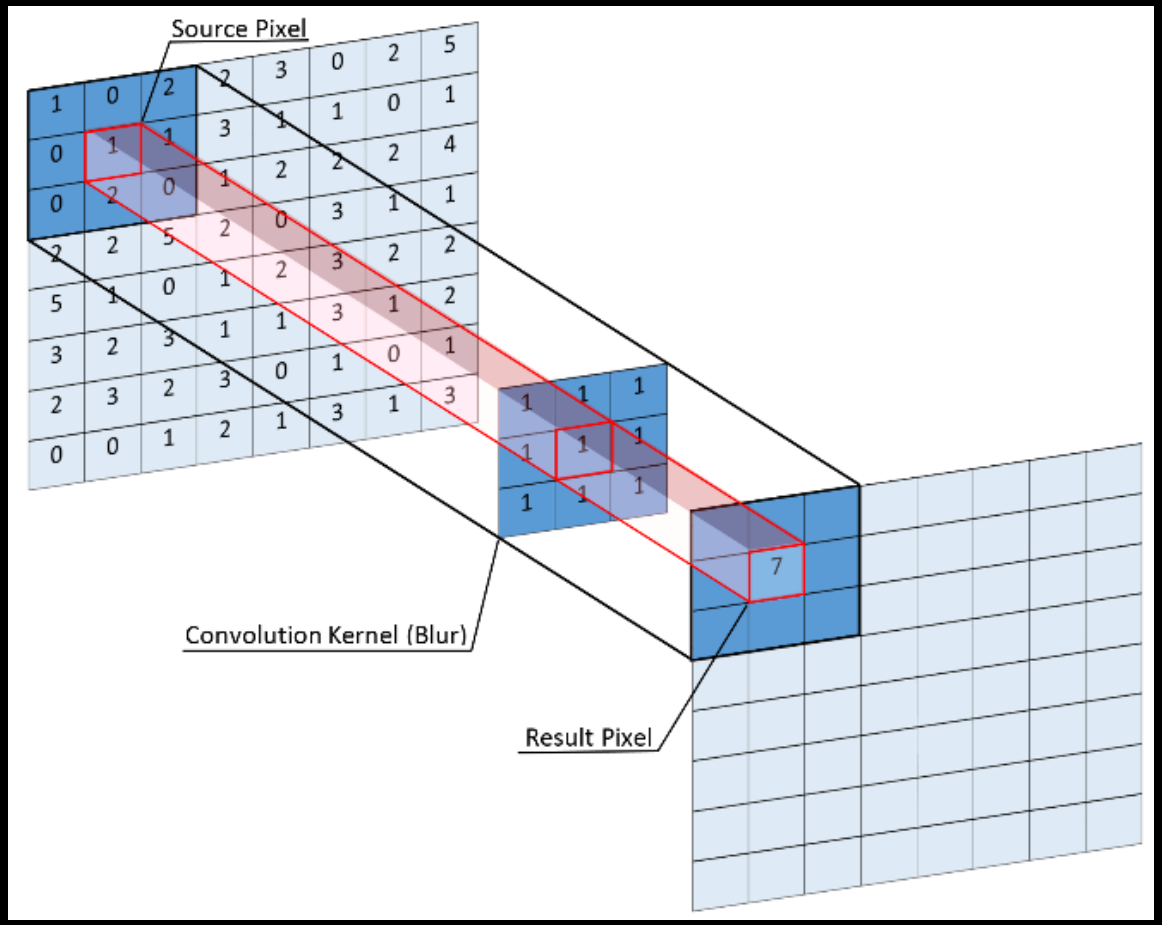
- Különböző emberek értékelései a mátrixban
- Feltételezzük, hogy van összefüggés az elemek között
- Hasonló elemeket keresünk
- Pl. filmajánlás



Képfeldolgozás

- Átalakítás
- Minőség javítása
- Alakzatok felismerése

Képfeldolgozás
Konvolúciós[7] mátrix



[7] Összehajtogatás, egybegyúrás (németül: Faltung)

Konvolúciós mátrixok

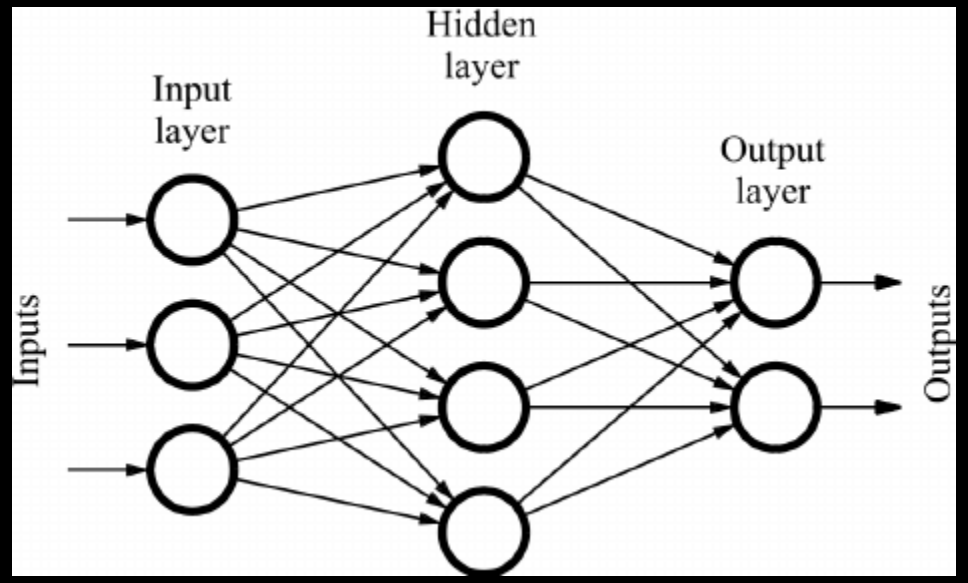
Operation	Kernel ω	Image result g(x,y)
Identity	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
Edge detection	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	

Konvolúciós mátrixok

Operation	Kernel ω	Image result g(x,y)
Sharpen	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	
Box blur (normalized)	$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	
Gaussian blur 3 × 3 (approximation)	$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	

Gépi tanulás

- Neurális hálók
  - Felírhatók mátrixként
  - Mátrix műveletek
    - Gyors számítások
  - Konvolúciós hálózatok
- Valóság felírása mátrixokkal
  - Érti a számítógép

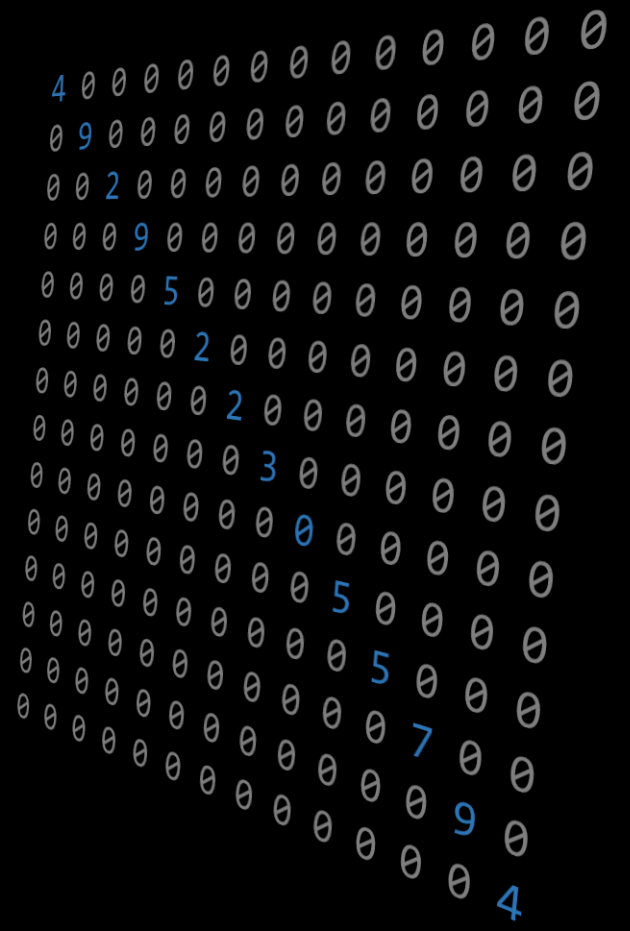


Irodalomjegyzék

- Matrices and determinants (February 1996), J. J. O'Connor and E. F. Robertson, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/
- Needham, Joseph (1986). Science and Civilization in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Taipei: Caves Books, Ltd.
- Szalkai István - Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai
- Ludwig, Jamie (n.d.). Image Convolution (PDF). Portland State University.
- Smith, Stephen W (1997). "13.Convolution". The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing (1 ed.). California Technical Publishing. ISBN 0-9660176-3-3. Retrieved 22 April 2016.
- Umbaugh, Scott E (2010). Digital image processing and analysis : human and computer vision applications with CVIPtools (2nd ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.

Összefoglalás

- Történelem
  - A mátrixok megjelenése
  - Determináns
- Matematikai használat
  - Komplex számok
  - Gráfelmélet
  - Egyéb alkalmazások
- Számítástechnikai használat
  - Grafikus elemek
  - Ajánlórendszerek
  - Képfeldolgozás
  - Gépi tanulás



Köszönöm a figyelmet!