Komplex számok

Horváth László S.

Kialakulása:

- Már a reneszánsz korában megjelentek ezek az új számok, melyeket "lehetetlen mennyiségek"-nek (quantitates impossibiles) neveztek XVIII. század végéig, amíg nem definiálták a képzetes egységet.

- Casus irreducibilisnek ("fel/megoldhatatlan eset") nevezzük azt az esetet, amikor egy olyan valós együtthatós harmadfokú polinom gyökeit kívánjuk kiszámítani, melynek három különböző valós gyöke van. A komplex számok bevezetéséig elfajult esetnek számított az algebrai egyenletek elméletében. $x^3-6x^2+11x-6$ polinom gyökei 1,2,3, de a Cardano formula nem működik a négyzetgyök miatt

Girolamo Cardano, az első úttörő



- Élt: 1501–1576, nemzetiség: olasz
- Másodfokú és harmadfokú egyenletek megoldóképlete
- Ő az első, aki gyökjel alá negatív számot írt, amit "formális szám"-nak nevezett el.

Girolamo Cardano, az első úttörő



- tetszőleges harmadfokú egyenlet Tartaglia-féle alakra hozható.

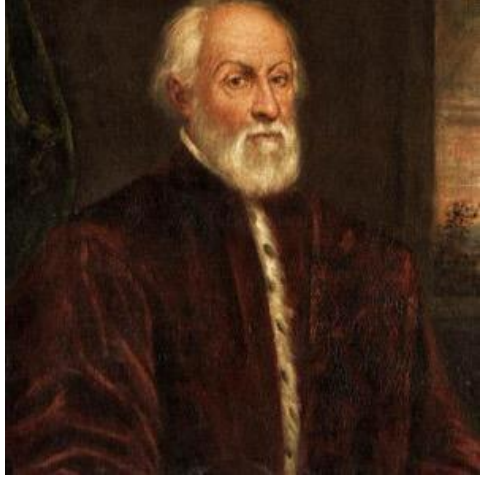
$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

- **Cardano- vagy Tartaglia-képlet** Scipione del Ferro és Tartaglia bizonyította be, hogy (2) alakú harmadfokú egyenletek (egyik) megoldását kiadja az alábbi képlet:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

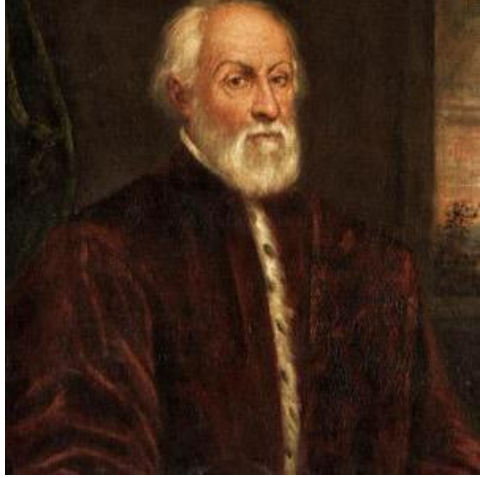
- Ám pont ebben a tipikusnak mondható esetben fordul elő az, hogy a megoldóképletben szereplő négyzetgyök alatt negatív szám áll. ($x^3-6x^2+11x-6$)
- Ha az általános eljárást kívánjuk folytatni, és a képlet alapján határozzuk meg a gyököket, nincs más út, minthogy a számítást komplex mennyiségekkel végezzük el.

Rafael Bombelli



- Élt: 1526–1572, nemzetiség: olasz
- Bombelli 1572-es könyvében, L'Algebra, egyenleteket (pl.: irreducibilis esetben) oldott meg del Ferro / Tartaglia módszerével. Bevezette a + i és -i reprezentatív szimbólumokat, és leírta, hogyan működnek.
- Világossá tette, hogy a képzeletbeli számok számtani szabályai nem ugyanazok, mint a valós számok esetében.
- Ő volt az első, aki tanította is a komplex számok helyes számítási szabályait.

Rafael Bombelli



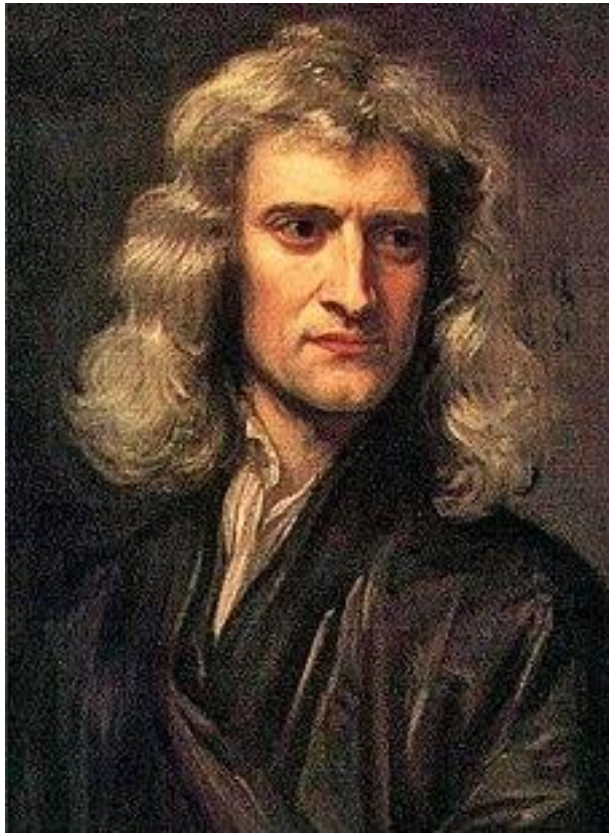
- 8 szabályt fogalmazott meg az előjelekkel kapcsolatban:

  "Plus by plus of minus, makes plus of minus.
  Minus by plus of minus, makes minus of minus.
  Plus by minus of minus, makes minus of minus.
  Minus by minus of minus, makes plus of minus.
  Plus of minus by plus of minus, makes minus.
  Plus of minus by minus of minus, makes plus.
  Minus of minus by plus of minus, makes plus.
  Minus of minus by minus of minus makes minus.„

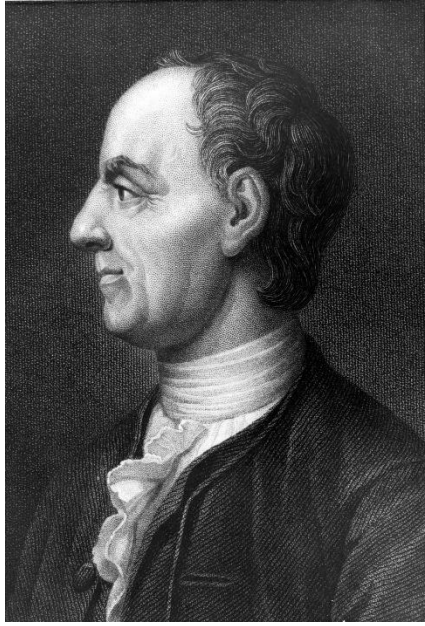
- Tétel: nincs < reláció, ami a műveletekkel összhangban lenne

Isaac Newton

- Élt: 1642–1727 nemzetiség: angol
- Bevezette a fizikába;
- Úgy gondolta, hogy a komplex gyökök egy egyenlet megoldhatatlanságára utalhatnak;
- "But is is just that the Roots of Equations should be impossible, lest they should exhibit the cases of Problems that are impossible as they were possible."



Leonhard Euler



- Élt: 1707–1783, nemzetiség: svájci
- "Introductio in Analysin infinitorum" művében jelentek meg a komplex számok
- "Euler-formula" $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ és $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
- Voltak azonban hibás bizonyításai is

- „Emiatt teljesen nyilvánvaló, hogy a negatív számok négyzetgyökével nem számolhatunk a valós számok körében : tehát azt kell mondanunk, hogy ezek a számok nem valósak.„

Leonhard Euler

- Euler-összefüggés $e^{i\pi} + 1 = 0$
- Az Euler-képlet azt állítja, hogy minden valós *x* számra igaz:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

- Euler-egész (Eisenstein-egészek) $a + b\omega$ ahol *a*, *b* egész és

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Carl Friedrich Gauss

- Élet: 1777–1855, nemzetiség: német
- Ő is bizonyította az algebra alaptételét
- „a végtelen síkban tudjuk elképzelni a komplex számokat, ahol az ordináta legyen ‚a’ , az abcissza ‚b’ és így a valós számpárok segítségével reprezentáljuk az összes a + bi alakú komplex számot”
- Gauss-egész
  - A Gauss-egészek az a+bi alakú komplex számok, ahol a és b egészek. Körükben a közönséges egészekhez hasonló számelmélet építhető ki.



Carl Friedrich Gauss

- A Nagy Fermat sejtés n=3 esetre teljes bizonyítását Gauss adta meg, aki azt igazolta, hogy az egyenletnek nincs megoldása az Eisenstein-egészek körében.
- Bizonyításának alapgondolata a következő volt: Azt igazoljuk, hogy az Euler-egész körében nincs megoldása az $x^3 + y^3 = uz^3$ egyenletnek, ahol *x*, *y*, *z* nem nulla (tehát a megoldás nem triviális) és *u* egység.

Ábrázolása

Caspar Wessel (1745–1818)

- nemzetiség: dán-norvég , földmérő
- 1799-ben Wessel volt az első, aki leírja a komplex számok geometriai értelmezését, mint a komplex sík pontjait
- Om directionens analytiske betegning c. értekezését 1797-ben mutatták be a Royal Danish Academy of Sciences and Letters-ben.
- Komplex számsík $\sqrt{-1}$ Függőleges tengelyen egy egység

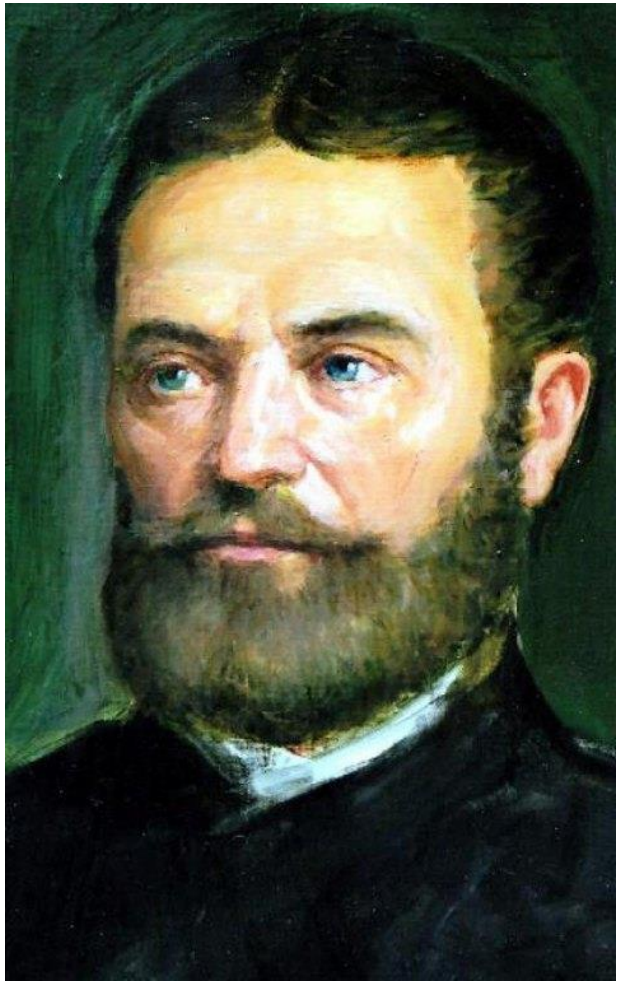
Ábrázolása

Jean Robert Argand (1768–1822)

- Nemzetiség: svájci, könyvelő
- 1806-ban elsőként adott teljes bizonyítást az algebra alaptételére.
- Publikált egy ötletet a komplex számok geometriai értelmezésére, amit Argand-diagramnak hívnak.
- $\sqrt{-1}$ 90 fokos forgatásként fogta fel

Bolyai János

- Élt: 1802 – 1860 nemzetiség: magyar
- Bolyai Farkas gyermeke, tanítványa
- matematikus és hadmérnök
- A komplex számokat, a kortárs Hamiltonhoz hasonlóan, rendezett valós számpárként fogta fel.



Responsio

Teljes cím: " Válasz a Lipcsei Jablonszki Tudományos Társaság 1837 évi pályázatára, a képzetes mennyiségek tulajdonságainak és geometriai előfordulásainak magyarázatáról ... „

A lipcsei **Jablonowski Társaság** pályázati kérdése a **komplex számok szerkeszthetőségére várt felelelet**

Bolyai: *a szerkeszthetőség mellékes probléma, a komplex számok PRECÍZ értelmezése a fontos, illetve a geometriai szerepük.*

Képletében rendezett számpárnak tekintette a komplex számokat

Dolgozatának jeligéje magyarra fordítva: *Csak az érett gyümölcsöt szabad leszedni* -> munkáját degradálták, egy másik versenyzőhöz hasonlították, azt mondták, ugyanabba a hibába esett. Bolyai igazságtalannak érezte a kritikát.

az utókor tudományos vizsgálata kiderítette, hogy Bolyai János jogosan érezte a kritikát alaptalannak: messze az ő dolgozata volt a legjobb, csak tömör és nehezen érthető

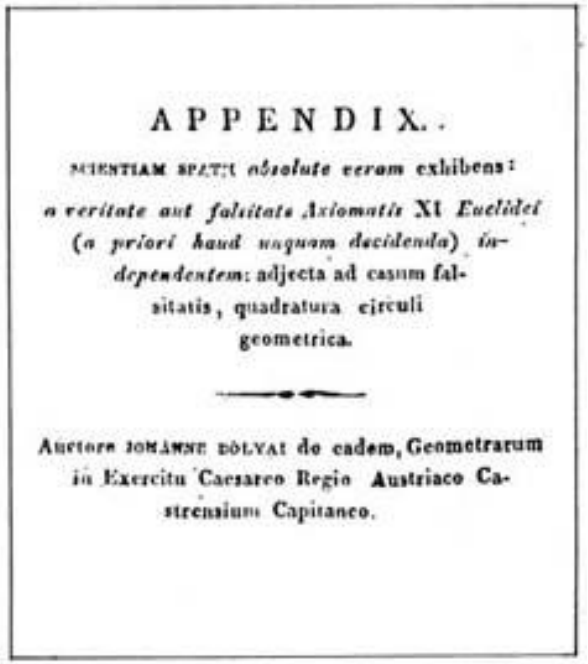
Responsio

9.§:

Rámutat a képzetes mennyiségeknek a geometriában játszott fontos szerepére.

Hivatkozik a az Appendix 3§-ára

- hiperbolikus geometria két képlete
- hiperszféra fogalma
- az abszolút trigonometria formailag megegyezik a k / i sugarú gömb trigonometriájával, AHOL
  i = √-1, k pedig a hiperbolikus állandót jelenti



APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore IOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Bolyai János a Responsioban gyakran hivatkozik az Appendix-re, ami persze akkor még nem volt közismert, főleg a Jablonszky társaságnál

Bolyai János

Bolyai eredeti műveiben a hiperbolikus állandó i-vel van jelölve, az most itt k lesz, mert az i már az imagináriust jelöli.

Bolyai János korában a hiperbolikus függvények nem voltak közismertek, János azonban sokszor használja őket, talán ő fedezte fel/mutatta meg alkalmazásaikat

négy egységet vesz fel:

+1 ; -1 ; +i ; -i (ahol i = √-1)

Azért vesz fel 2 egységet, hogy kikerülje a negatív számok precíz bevezetésével járó bonyodalmakat.

Bolyai János

Bolyai különbséget tett a minőségi és műveleti jelek között.

Minőségi jelekre a Responsioban tér csak ki, a komplex számoknál már nem.

Kéziratában találkozhatunk az

sh x ch x th x cth x megnevezésekkel (*sin, cos, tg, ctg*).

Fizikai alkalmazás

- Váltakozó áram
  - Olyan helyzetben, amikor a frekvencia egy rendszerben a vizsgálat idején állandó, az amplitudót és a fázist gyakran összevonják az úgynevezett komplex csúcsértékbe, amelyet a következő összefüggés definiál: $\hat{I} = Ie^{j\phi}$
- Rezgéstan, hullámtan
- Komplex amplitúdófüggvények
  - Az Euler-formula értelmében egy harmonikus függvényt megadhatunk az alábbi formában két komplex függvénnyel (mivel a két komplex függvény egymás konjugáltjai, a kifejezés valós lesz): $A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \frac{e^{i(\omega t+\theta)} + e^{-i(\omega t+\theta)}}{2},$
- Kvantummechanika

Kvaterniók



- A matematikában a kvaterniók a komplex számok négy dimenzióra történő nem kommutatív kiterjesztései. Először Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász vezette be 1843-ban.
- Definíció: q = a + bi + cj + dk alakú formális kifejezésekből, az úgynevezett kvaterniókból áll, ahol a, b, c, d valós számok, i,j,k pedig a Q kvaterniócsoport elemei. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$
- Ha a szorzást asszociatívnak tekintjük (és valóban az is), a következő egyenlőségek állnak fenn:

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned}$$

Felhasznált irodalom

- Tóth András Komplex számok BSc szakdolgozat
- https://www.arcanum.hu/hu/online-kiadvanyok/MuMaTu-a-mult-magyar-tudosai-1/bolyai-janos-BAB/
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Harmadfok%C3%BA_egyenlet
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Casus_irreducibilis
- https://en.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli
- https://en.wikipedia.org/wiki/Caspar_Wessel
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Descartes-szorzat
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Az_algebra_alapt%C3%A9tele
- Weszely Tibor: Bolyai János matematikai munkássága, Kriterion, 1981.

Köszönöm a figyelmet!