

Kockakettőzés

Sótonyi Veronika



Három híres ógörög szerkesztési feladat

- a környégyszögesítés,
- a ***kockakettőzés*** és
- a szögharmadolás

Látszólagos egyszerű, ugyanakkor euklideszi szerkesztéssel megoldhatatlan feladatok.

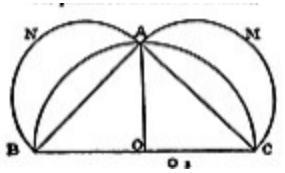
Magasabb rendű szerkesztés igénybevétele: speciális vonalzók, rajzeszközök, kúpszeletek, görbék



A feladat eredete

- $x^3=2a$ alakú egyenlettel kapcsolatos köbgyökvonás geometriai értelmezése
- Déloszi probléma: kocka alakú oltárkő megkettőzése az istenek kívánságára a pestisjárvány megfékezésére

HIPPOKRATÉSZ (i. e. 450 körül)



- Hippokratész-féle holdak
- Négyzetkettőzés :

  a : x=x : 2a aránypárnál x keresése
- Kockakettőzés: előbbi általánosítása

  a:x=x:y=y:2a folytonos aránypárláncnál x és y keresése

Ekkor $\left.\begin{array}{l} x^2=ay \\ xy=2a^2 \end{array}\right\} \quad x^3=2a^3$

- Hippokratész a szerkesztéssel nem boldogult.



MENAIKHMOSZ
(i. e. 350 táján)

- Nagy Sándor nevelője
- „ a geometriához mindenki számára csak egyetlen út vezet.„
- Kúpszeletek felfedezése
  - a tompaszögű kúp síkmetszete: hiperbola,
  - a derékszögű kúp síkmetszete: parabola
  - a hegyesszögű kúp síkmetszete: ellipszis
- Kúpszeletnek néhány tulajdonságát, sőt mindegyiknek a egyenletét is megállapította.

MENAIKHMOSZ

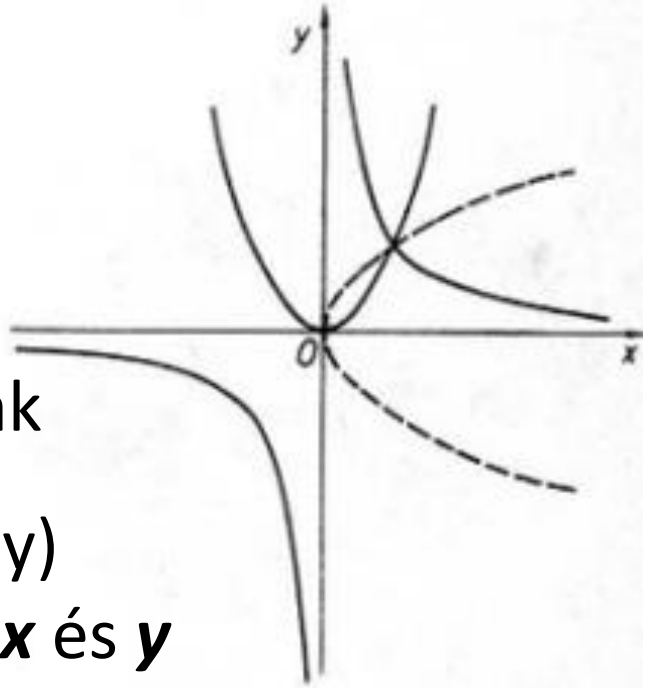
Hippokratész aránypárláncolata $a:x=x:y=y:2a$

$xy=2a^2$ a hiperbola,

$x^2=ay$ a parabola

valamint

$x^2=ay$ és $y^2=2ax$ parabolák



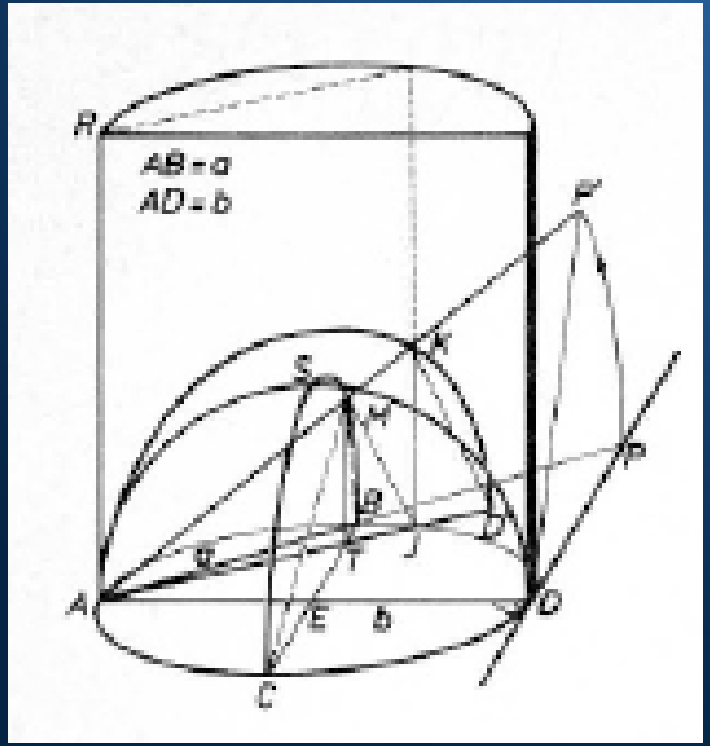
metszéspontjaik (x; y) koordinátája a keresett ***x*** és ***y***

ARKHÜTASZ
(i. e. 428?-365)

- Tekintélyes államférfi volt, városának 7 éven át legyőzhetetlen hadvezére, feltaláló, fizikus és matematikus, a püthagoreusok utolsó nagy képviselője
- Eukleidész nagy művében: az Elemekben az egész VIII. könyvet Arkhütasz munkássága tölti ki

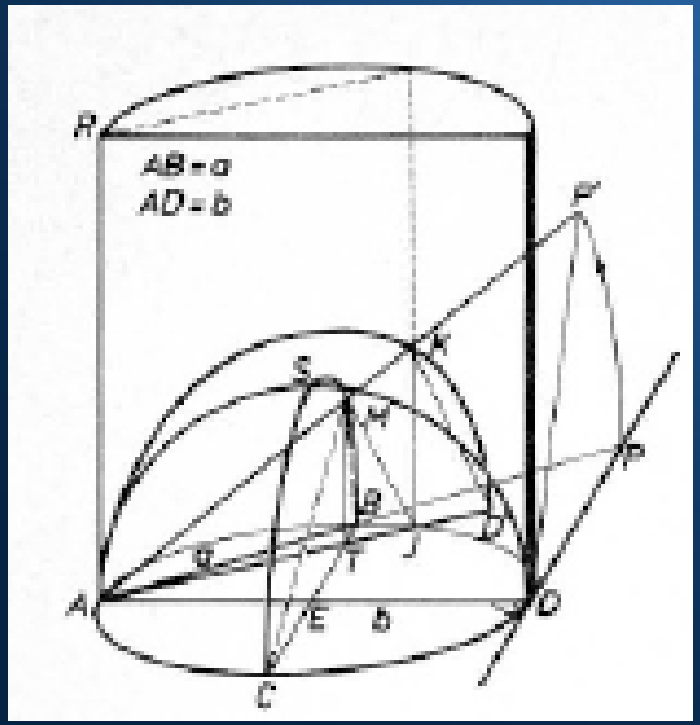
ARKHÜTASZ

a:x=x:y=y:b, ahol b=2a



b átmérőjű ACDB kör fölé
egyenes henger
AB=a húr és D-beli érintő→ADPΔ
AD átmérőjű ADS félkör
-ADPΔ forog AD körül
AP egyenes B pontja leírja a
BMC félkört
-ASD kör forog AR körül

ARKHÜTASZ



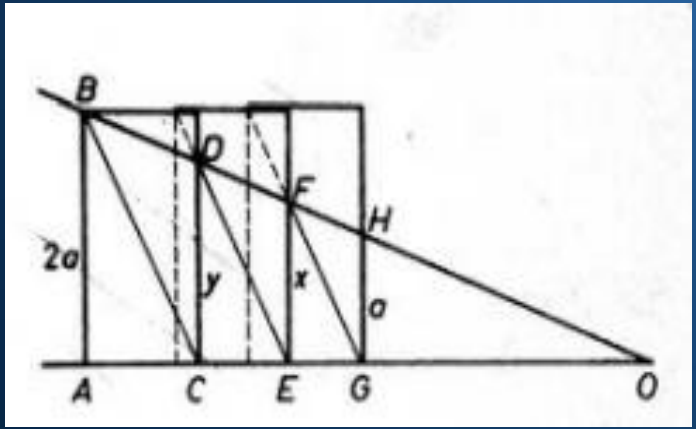
AD'=b AM=a, AJ:=x, AK:=y

AJM△ ~AKJ△ ~AD'K△

AM:AJ=AJ:AK= AK:AD'

$$a: x = x: y = y: b$$

ERATOSZTHENÉSZ
(i. e. 276-196?)



OA: rögzített vonalzó

OB: O körül forgatható vonalzó

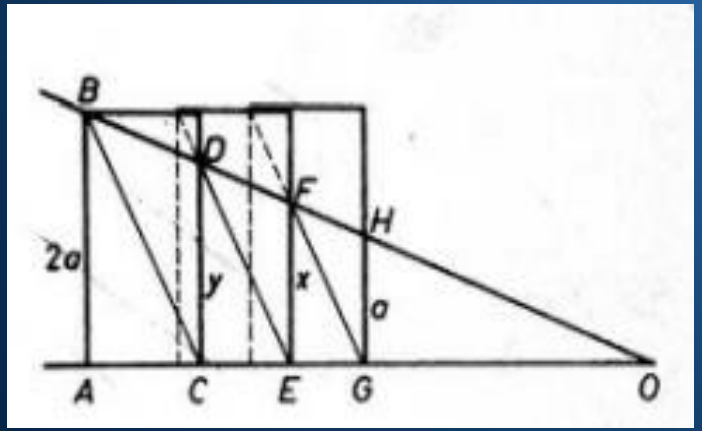
OA-n három egybevágó téglalapot mozgathatunk

A téglalapokon az átlót berajzoltuk

A három téglalapot elhelyezése:

- Az első téglalap B pontja (AB=2a)
- a H pontnak (GH=a), valamint
- Az átlók és a jobb oldali oldalélek metszéspontjának (D és F pont) kell egy egyenesen lenni

ERATOSZTHENÉSZ
(i. e. 2767-196?)



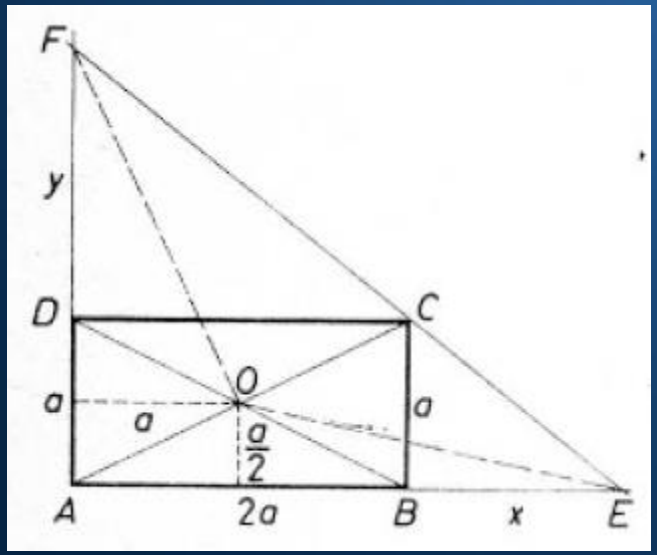
Hasonló Δ-ek: ACBΔ, CEDΔ, EGFΔ

2a : y=BC : DE=y : x=DE: FG= x : a

$$2a : y = y : x = x : a$$

Eratoszthenész nagyságát Arkhimédész - kortársa és barátja - versben örökítette meg.

APOLLÓNIOSZ
(i. e. 260?-190?)



ABCD téglalap, AD=a, AC=2a

OF=OE, úgy FE illeszkedjen C-re

$BE \coloneqq$ x, DF $\coloneqq$ y,

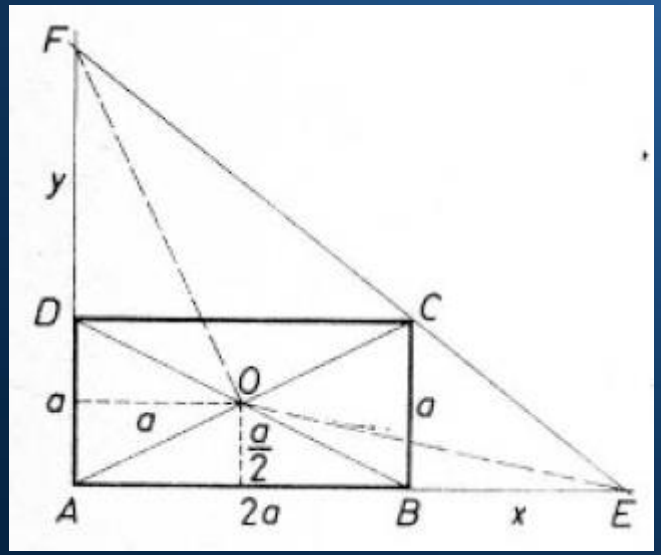
EBC$\triangle \sim$ CDF$\triangle \Longrightarrow a : x = y : 2a$

EBC$\triangle \sim$ EAF $\triangle \Longrightarrow (y + a) : (x + 2a) = a : x$

Mivel OF=OE,

$$(x + a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

Rendezéssel: $(y + a) : (x + 2a) = x : y$



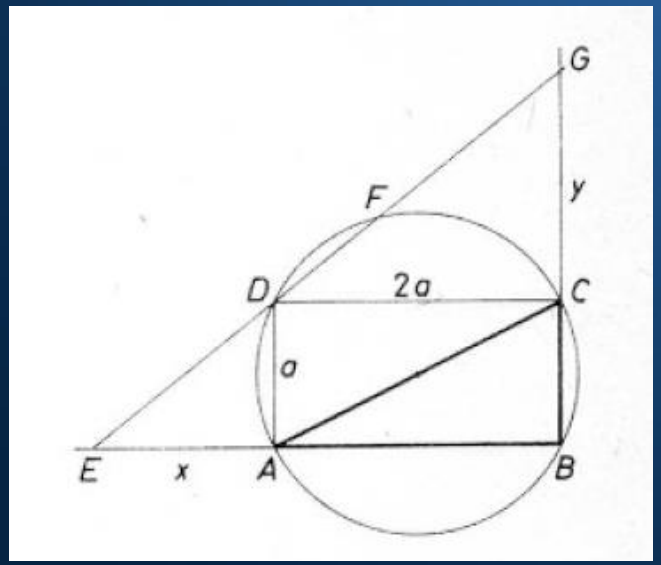
$$a : x = y : 2a$$

$$(y + a) : (x + 2a) = a : x$$

$$(y + a) : (x + 2a) = x : y$$

$$a : x = x : y = y : 2a$$

A BIZÁNCI PHILÓN
(i. e. III. század)



AB=2a, BC=a

EG menjen át D-n úgy hogy ED=FG

Ekkor ***EF*ED=GD*GF*** és

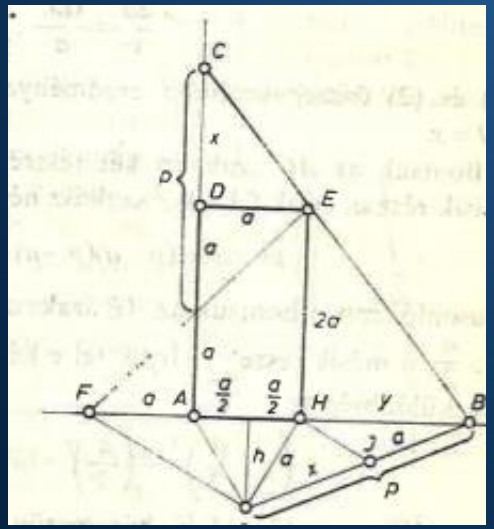
$$\boldsymbol{EF * ED = EB * EA = (x + 2a) * x}$$

$$\boldsymbol{GD * GF = GB * GC = (y + a) * y}$$

bal oldal egyenlő ⇒ jobb oldal is

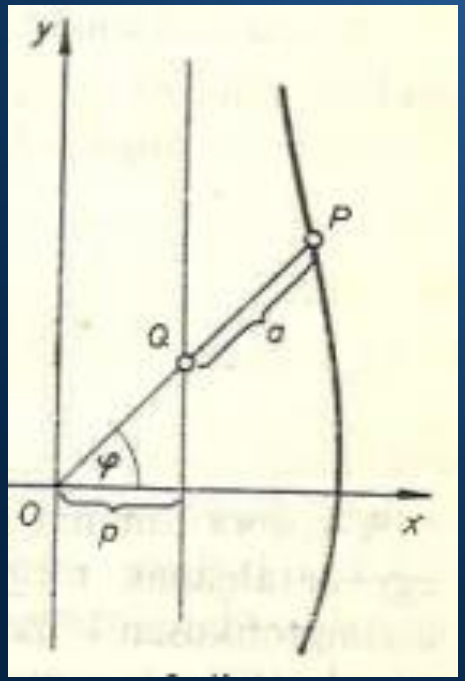
$EAD \triangle\sim DCG \triangle\sim EBG \triangle$ −ból következeik a Hippokratesz arány

Nikomedész
(ie. 200 körül)



EF átmegy AD felezési pontján
AGH egyenlő oldalú △
GF párhuzamos HJ, J olyan, hogy JB=a (*)
B összekötve E-vel, kimetszi C-t
Ekkor DC=x; HB=y,
* J pont- Nikomedész konhois görbéje segítségével

Nikomedész-féle konhois

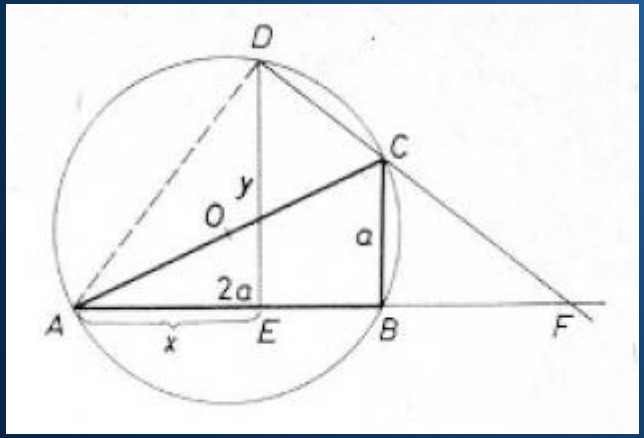


Azon P pontok helye, ahol ***OP=OQ+a***

- ***O*** a koordináta-rendszer kezdőpontja
- ***Q*** az x=p egyenes tetszőleges pontja
- ***a*** egy állandó távolság

Nikomedész szerkesztése konhois körző segítségével lehetséges.

MUHJIADDÍN AL-MAGRIBI (1260 KÖRÜL)



AB=2a, BC=a, EF=AB ⇒AE=BF

D a CF egyenesen és a Thalész-körön

- $EFD\ \triangle\sim\ BFC\ \triangle$⇒oldalak aránya
- ADFь $\triangle$ −ből ⇒magasságtétel

$$\Rightarrow\ AB:DE = DE:AE = AE:BC \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{2a:y = y:x = x:a}$$



Az európai reneszánsz, majd a felvilágosodás matematikusai (Pascal, Newton) is gazdagították a megoldások sorát.



Pierre Laurent Wantzel
(1814- 1848)

francia matematikus, aki egy 1837 - es tanulmányban bebizonyította, hogy számos ősi geometriai problémát, köztük a kocka megduplázását lehetetlen megoldani csak iránytűvel és egyenes vonallal .



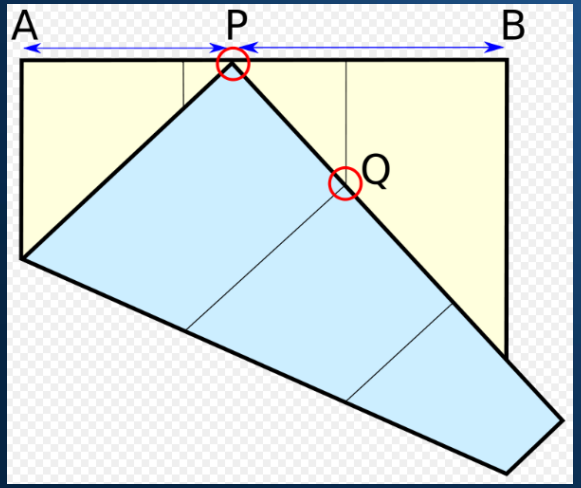
Érdekességek: **Zeneelmélet**

- a megduplázódás analógja egy hangfrekvencia megduplázódása-***az oktáv***,
- a kocka természetes analógja pedig az oktávot három részre osztja

Egyharmad oktáv sávot olyan frekvenciasávként definiálunk, amelynek felső sávszélesség-frekvenciájának (f2) az alsó sáv-frekvenciájának (f1) hányadosa: $\sqrt[3]{2}$

Érdekességek: Origami

Peter Messernek köszönhető



A négyzet alakú papírt először három egyenlő csíkra hajtjuk.

Ezután a bal alsó sarkot (P) úgy helyezzük el a felső élen, hogy a két gyűrődési jel Q-ban találkozzon.

A PB hossz ekkor az AP szakasz $\sqrt[3]{2}$-szeresének felel meg.

Forrás:

- Sain Márton, Nincs királyi út Gondolat, Budapest, 1986, 102-129. old, letöltve: https://mek.oszk.hu/05000/05052/pdf/ 2020.02.19.
- Cser Andor:Élő matematika, 14. old
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Kockakett%C5%91z%C3%A9s
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Wantze
- https://en.wikipedia.org/wiki/Octave_band



Köszönöm szépen a figyelmet!