A nagy Fermat-sejtés megoldása

Készítette:

Bencze Kiara

Pierre de Fermat



1601 - 1665

Francia jogász, fellebbviteli bíróság tagja

Amatőr matematikus

A differenciálszámítás, valamint a számelmélet atyjaként emlegették.

Figyelemre méltó megfigyeléseket tett az analitikus geometria, a valószínűségszámítás és az infinitezimális számítás területén.

Kis Fermat-tétel

$a^p \equiv a \ (mod\ p)$ $\quad\quad$ $a \in \mathbb{Z},\ p$ prímszám

$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ $\quad\quad$ $a \in \mathbb{Z},\ p \nmid a$

A tételt a matematika több területén alkalmazzák, alapja a Fermat-prímtesztnek, aminek szerepe van például az egyik legmodernebb rejtjelezési módszerben, az RSA-eljárásban.

Pitagorasz tétel

$$x^2 + y^2 = z^2$$

közismert, hogy végtelen sok pitagoraszi számhármas van

Nagy Fermat-sejtés

Pierre de Fermat a következő megjegyzést fűzte Diophantosz Aritmetika című könyvének margójára:

"… Ugyanakkor teljesen lehetetlen a köb felbontása két köb összegére, vagy a negyedik hatványoké két negyedik hatvány összegére, de nem lehet semmilyen más magasabb hatványt sem felbontani két ugyanolyan hatványkitevőjű szám összegére. E tételnek valóban **bámulatos bizonyítás**ára jöttem rá, de nincs elég hely, hogy ide leírjam."

A probléma formálisan

Az

$$x^n + y^n = z^n$$

egyenletnek nincs megoldása a nemnulla egész számok körében n>2 természetes szám esetén.

Tétel bizonyítása

$$x^n + y^n = z^n$$

Ha igazoljuk a sejtést n kitevőre, akkor az igaz az n minden m többszörösére is
$x^{mn} = (x^m)^n$

Tehát elég a sejtést n = 4 esetre és páratlan prím kitevőre igazolni, mert
$n = m_1 m_2$ összetett szám esetén $(x^{m_1})^{m_2}$

A tétel bizonyítása

- **n = 4**
  maga Fermat bizonyította a végtelen leszállás módszerével
- **n = 3**
  Euler (1707-1783, svájci matematikus és fizikus) bizonyította 1753-ban, Algebra című művében bizonyítása nem teljes
- Gauss (1777-1855, német matematikus) szintén az n = 3 eseten dolgozott
  Felhasználta Euler sejtését
  Bizonyítását az Eisenstein egészek (**Euler egészek**) körében végezte, igazolta hogy nincs megoldása a $x^3 + y^3 = uz^3$ egyenletnek ($x, y, z \neq 0$, és u egységnyi)

Komplex számok

Euler egészek

$Z[\rho] = \{a + b\rho \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\rho = \cos(120°) + i \sin(120°)$

Gauss egészek

$Z[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

A számelméletben évszázadok óta használják a komplex számokat.

A komplex egészeket Bolyai János (1802-1860, magyar matematikus) is sokat vizsgálta

A tétel bizonyítása

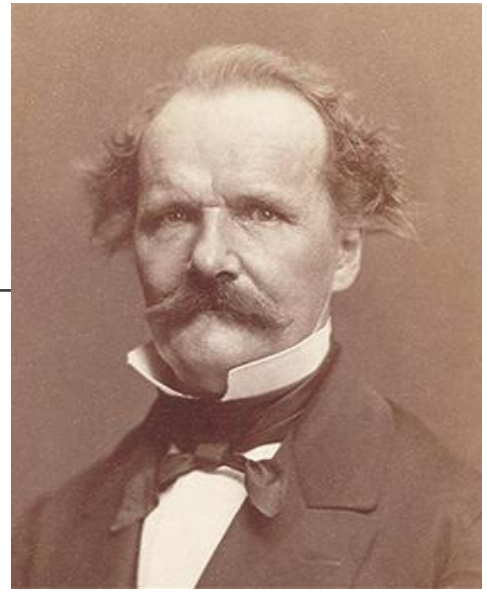
- **n = 5**
  Dirichlet (1805-1859, német matematikus) és Legendre (1752-1833, francia matematikus) talált bizonyítást 1825-ben
- **n = 14**
  Dirichlet bizonyította 1832-ben
- **n = 7**
  bizonyítása Lamé (1795-1870, francia matematikus) nevéhez fűződik, 1839

1847. eredményei

Ekkor született az első nevezetes hibás bizonyítás, mely Cauchy (1789-1857, francia matematikus) és Lamé nevéhez fűződik

A másik – sokkal fontosabb – fejlemény: Kummer eredménye

Ernst Kummer



1810 – 1893

Német matematikus

Kummer egy egészen más jellegű számelméleti probléma vizsgálata során megalapította az ideál elméletet, mely a modern számelmélet egyik hatékony eszközévé vált

Módszere a 37, 59 és 67 kivételével minden 100-nál kisebb n prímre működik

H. S. Vandiver

1882 – 1973

Amerikai matematikus

Kummer eredményeire építve Vandiver (1920 körül) igazolta a sejtést $n \leq 100$-ra

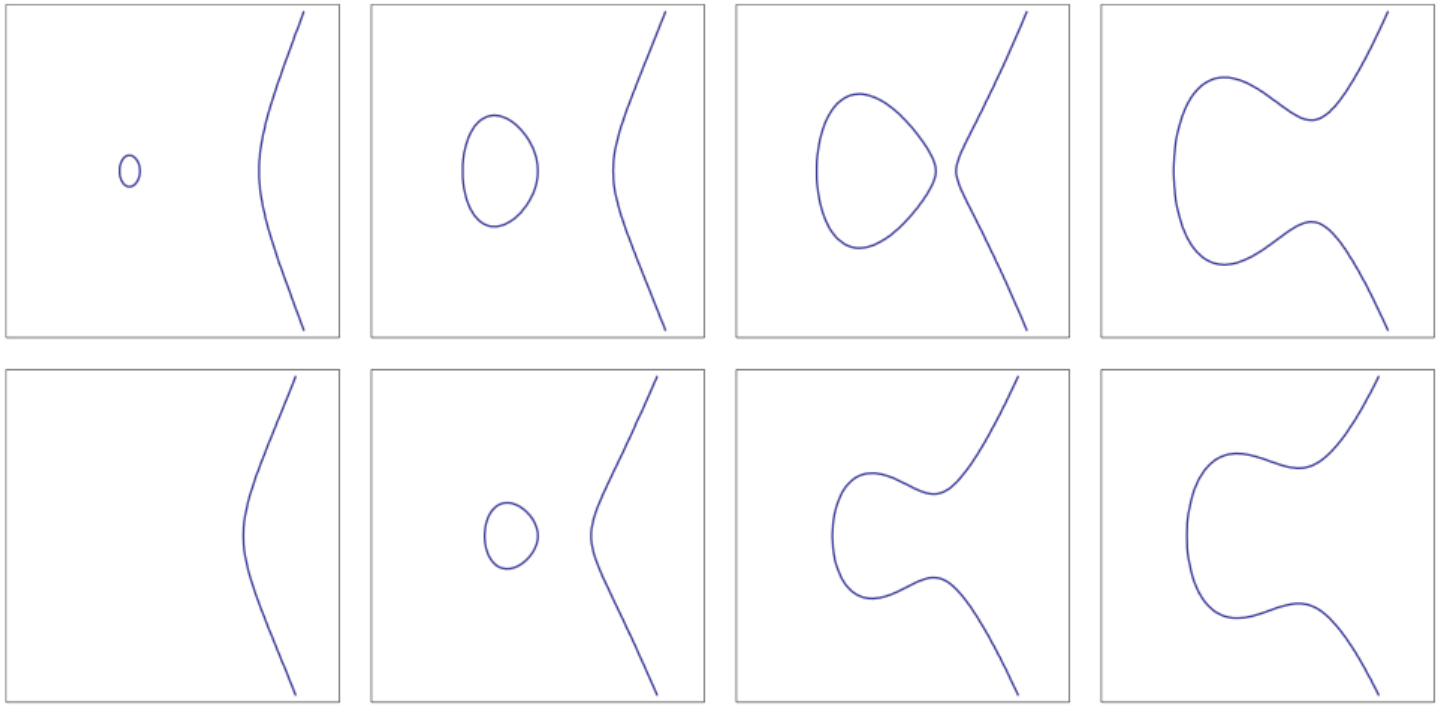
1931-ben elnyerte az Amerikai Matematikai Társaság Frank Nelson Cole-díját a nagy Fermat-tételről szóló tanulmányáért

1952-ben számítógépek segítségével bizonyította a sejtést minden $n \leq 2000$ prímre

Elliptikus görbék

$E(a, b, \mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\sigma\}$

$4a^3 + 27b^2 \neq 0$



Elliptikus görbék

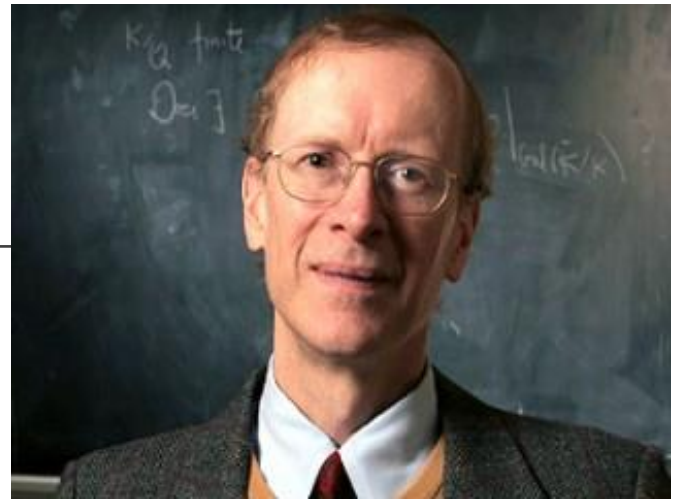
A Fermat-sejtés történelmében főszerep jutott az elliptikus görbéknek.

Taniyama Yutaka (1927-1958, japán matematikus) 1955-ben merészen hangzó sejtést tett közzé a racionális együtthatós elliptikus görbékről.

Később Shimura Goro (1930-2019, japán matematikus) és André Weil (1906-1998, francia matematikus) finomabb megfogalmazását adták ennek a sejtésnek.

Ezt a hipotézist Taniyama–Shimura–Weil-sejtésnek nevezzük.

Andrew John Wiles



1953 -

USA-ban élő angol matematikus

Gyerekként találkozott a nagy Fermat-tétellel

Már akkor aktívan érdeklődött a matematika iránt

Sikerhez vezető út

1984. Gerhard Frey (1944-, német matematikus): aki bebizonyítja a Taniyama-Simura-Weil sejtést, az egyszersmind belátja a Fermat-sejtést is

1986: Wiles megkezdte a munkát

7 éven keresztül titokban dolgozott a bizonyításon

1993: Cambridge, számelméleti konferencia, bejelenti eredményeit

Publikálás során logikai hiányosságokat találtak, 14 hónap múlva javította eredményeit.

1995-ben publikálja a Fermat-sejtés hibátlan bizonyítását

Népszerű probléma

- Több értékes díjat tűztek ki a megoldó jutalmazására
- Legismertebb az 1908-ban alapított Wolfskehl Díj
- Probléma: elképesztő számú hibás bizonyítást tettek közzé
- Csak az 1908–1912 időszakban ezer felett volt a hibás kísérletek száma

Wiles kitüntetései

Számtalan kitüntetéssel és díjjal jutalmazták Wiles eredményét:

Wolf-díj, 1995

Wolfskehl-díj, 1997

Fields-érem, 1998

Lovaggá üti a Királynő a munkásságáért, 2000

Abel-díj, 2016

Összegzés

Több mint 350 évvel a probléma megszületése után bizonyítást nyert a tétel

Kb. 150 oldalas bizonyítás

XX. századi matematikai megoldásokkal

Lehetséges, hogy Fermat „bámulatos bizonyítása” téves volt

Források

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar15.html

https://hu.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

https://hu.wikipedia.org/wiki/Nagy_Fermat-t%C3%A9tel

https://hu.wikipedia.org/wiki/Kis_Fermat-t%C3%A9tel

https://hu.wikipedia.org/wiki/Andrew_Wiles

Köszönöm a figyelmet!