Szemelvények a matematika történetéből
VEMIMA5312T

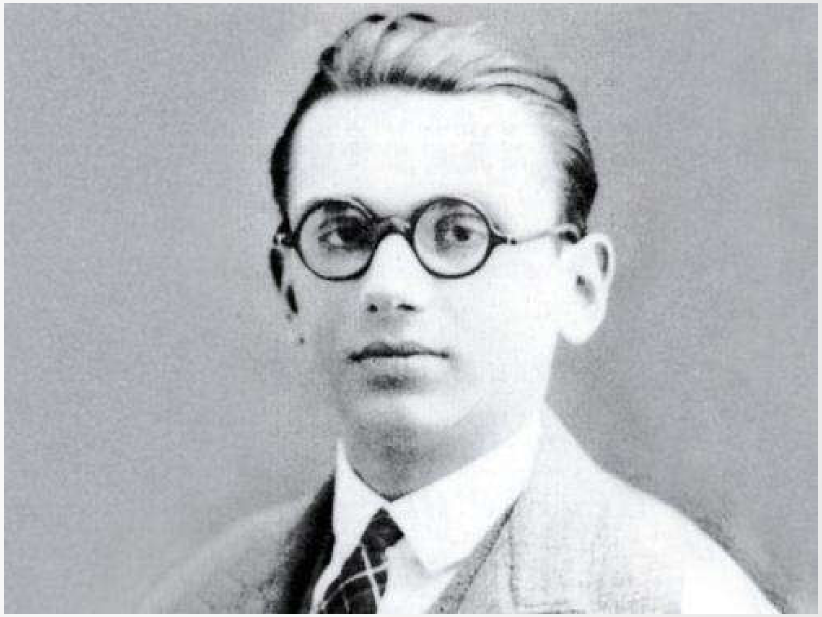
Kurt Gödel élete és hatása a számítástechnika fejlődésére

Sebők Levente UCVJU1
2017. december 9.

Életrajzi adatok

Kurt Gödel (1906-1978.)

• osztrák matematikus-filozófus
• A XX. sz. egyik legnagyobb matematikusa
• sz.: Brünn/Brno OMM, mh.: Princeton USA
• Bécsi Egyetem, matematika – elméleti fizika szak
• 1930-ban doktorált
• 1940-ben emigrált az USA-ba
• A princeton-i egyetemen kapott állást
• Időskorára eluralkodott rajta paranoiája, ami szerint meg akarják mérgezni, ezért nem vett magához ételt. Halálát kóros alultápláltság okozta



Kép forrása: https://phys.org/

Jelentős kortársai

- **Alan Turing**-gal egyidőben, de egymással egyet nem értve kutatták a számítógépes intelligencia fogalmát. Turing-gal ellentétben Gödel nem vett részt számítógép tényleges megépítésében

- Dolgozott **Neumann Jánossal** a P=NP probléma megoldásán és

- **Albert Einstein**-nel a relativitás-elméletén

Jelentős művei a számítástechnika elméletének megalapozásában

Teljességi tétel (1930-ban megjelenteve)

- Ha egy L elsőrendű nyelvben T elmélet és φ zárt formula, amire teljesül $T \vDash \varphi$, azaz igaz T minden modelljében, akkor $T \vdash \varphi$ is teljesül, azaz φ levezethető T-ből. (Forrás: Wikipedia)

- Hilbert és Ackermann munkájának továbbfejlesztése, amelynek **jelentősége a számítástudomány szempontjából**, hogy igazolta, hogy egy formális nyelv (predikátum kalkulus) axiómái univerzálisan igazak, így minden tétele is igaz. Egy számítógép, amelyet ezen tételek alapján programoztak, az axiómákból kiindulva szükségszerűen szintén helyes eredményre jut.

(forrás: „A Gödel-tételek“, E. Szabó László, Logika Tanszék, Filozófia Intézet ELTE BTK)

Jelentős művei a számítástechnika elméletének megalapozásában

Első nem-teljességi tétel (1931-ben megjelenteve)

- Minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó, formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható. (Forrás: Wikipedia)

- Jelentősége a számítástudományban, hogy létezhetnek olyan matematikai-számelméleti problémák, amelyek eldönthetetlenek

- Gödel-Rosser – tétel és a „**megállási probléma**“: nincs rekurzív eljárás arra nézve, hogy megallpítható legyen, hogy egy tetszőleges programot futtató számítógép véges időn belül megáll vagy sem (Forrás: Dr. Maróti György: A számítástudomány alapjai (VEMISAB512S), Pannon Egyetem)

Második nem-teljességi tétel (1931-ben megjelenteve)

- Minden elsőrendű T elméletben eldönthetetlen Con(T) (azaz T ellentmondás-mentessége), feltéve, hogy T ellentmondásmentes, T tartalmazza a Peano-axiómarendszert és T elemeinek Gödel-kódjai rekurzívan felsorolható halmazt alkotnak. (Forrás: Wikipedia)

- Peano axiómák:
  1. A nulla szám.
  2. Ha **a** szám, akkor az azt követő is szám.
  3. A nulla nem követi egyik számot sem.
  4. Ha két szám ugyanazt a számot követi, akkor azok egyenlők.
  5. Ha az S halmaz tartalmazza a nullát és az S minden számának a következőjét, akkor minden szám az S-ben van.

(Forrás: math.bme.hu/~jtoth/matektortenelem/PEANO.doc)

Nem-teljességi tételek jelentősége

A nem-teljességi tételek filozófiai jelentősége

- Túlszárnyalhatják-e egyszer a számítógépek az emberi elmét, illetve
- Léteznek-e az emberi gondolkodás számára megoldhatatlan matematikai problémák
- A matematika létezik-e az emberi elmétől függetlenül vagy sem

A Gödel-szám

Gödel-számozás és a kiszámíthatóság, rekurzivitás, és az eldönthetetlen problémák

- A Gödel-számozással formálisan is definiálható az általános Turing-gép
- Minden állítás egy jelsorozattal írható le, minden jelhez rendelhető egy-egy egyedi természetes szám (számok, műveleti jelek stb.)
- Az így kapott számsorozattal sorban a prímszámokat hatványozzuk: hatványozás a számsor eredeti sorrendjében a primszámok növekvő sorrendjében történik
- A fordított eljárás lesz az eredmény törzstényezőkre bontása

A Gödel-szám

Gödel-számozás és a kiszámíthatóság, rekurzivitás, és az eldönthetetlen problémák

- A nyelv minden állításához és annak bizonyításához, illetve állításához és annak tagadásához is így rendelhető egy-egy szám
- A Gödel-szám ugyanakkor egy olyan állításra vezet, amely nem bizonyítható be a rendszerben
- Jelentősége, hogy megmutatja, hogy léteznek olyan állítások, amelyek nem bizonyíthatóak pl. kontinuum-hipotézis: van-e olyan részhalmaza a valós számoknak, amely tartalmazza a természetes számokat, de nem ekvivalens sem az összes természetes szám halmazával, sem az összes valós szám halmazával? (Forrás: http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/Univ_Halmazelmelet/halmaz99/hipotezis.htm)

A nem-teljességi tétel jelentősége a számítástudomány szempontjából

1. Definiálta a primitív rekurzív függvény fogalmát
2. Elhatárolta a tárgynyelv- és metanyelv fogalmát
   - Tárgynyelv: a vizsgált nyelv, amelynek axiómái, levezetései, egyéb fogalmai a vizsgálat tárgya
   - Metanyelv: a vizsgált tárgynyelvi fogalmak definícióinak megfogalmazására
   (forrás: Bizonyításelmélet és Gödel-tételkör, összeállította Molnár Zoltán Gábor, http://math.bme.hu/~mozow/bizelm.pdf)
3. Adatábrázolás megújítása, ill. absztrakciója: pl. szöveg ábrázolása számok sorozataként

Gödel munkássága és a Church-tézis 1.

- Gödel 1932-től kezdett foglalkozni az eldönthetőségi kérdéssel, azaz, hogy létezik-e algoritmus egy tetszőleges (számelméleti) állítás igaz-hamis voltának megállapítására
- Vele egyidőben Alonzo Church és Alan Turing szintén kutatta ezt a területet és mindketten megmutatták, hogy az eldönthetőségi kérdés algoritmikusan nem oldható meg
- David Hilbert 10. problémája (1900-ból): általános módszer diofantikus / diofantoszi egyenletek (egész együtthatós egyenletek, amelyek gyökeit az egész számok körében keressük), azaz készíthető-e olyan algoritmus, ami véges sok lépésben eldönti egy tetszőleges diofantikus egyenlettől, hogy megoldható-e.

1970-ben Jurij Matijaszevics bebizonyította, hogy ilyen algoritmus nincs.

Jelentősége, hogy sok döntési probléma fogalmazható át diofantikus egyenletekké.

Gödel munkássága és a Church-tézis 2.

- Church és Gödel egyaránt meghatározták az effektíven kiszámítható függvények osztályát
- Church később a tézise nyilvánosságra hozatalakor a Gödel-féle definíciót alkalmazta. Gödel ezzel együtt szkeptikus volt Church tézisével kapcsolatban
- A Church-tézis: minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing-géppel is, illetve bármilyen, a Turing-gép fogalmával azonos számítási teljesítményű absztrakt modellel

(Forrás: Dina Goldin, Peter Wegner: The Origins of the Turing Thesis Myth)

Források

1. https://phys.org/news/2014-06-kurt-godel-statements-results-shook.html
2. Kurt Godel and Computability Theory: http://people.ucalgary.ca/~rzach/static/cie-zach.pdf
3. „A Gödel-tételek“, E. Szabó László, Logika Tanszék, Filozófia Intézet ELTE BTK http://phil.elte.hu/leszabo/Godel/2010-2011-2/godel.pdf
4. Dr. Maróti György: A számítástudomány alapjai (VEMISAB512S), Pannon Egyetem
5. Dr. Gyarmati Péter: Gödel- tétel Az eldönthetetlen problémákról, http://freeweb.deltha.hu/gyarmati.dr.hu/lectures/4.undecidability.pdf
6. Bizonyításelmélet és Gödel-tételkör, összeállította Molnár Zoltán Gábor, math.bme.hu/~mozow/bizelm.pdf
7. Dina Goldin, Peter Wegner: The Origins of the Turing Thesis Myth www.engr.uconn.edu/~dqg/papers/myth.pdf
8. http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/Univ_Halmazelmelet/halmaz99/hipotezis.htm
9. math.bme.hu/~jtoth/matektortenelem/PEANO.doc

Javítások

- oldalszámozás
- konzisztencia = ellentmondásmentesség
- a 6. helyesbítése, illetve összevonása az 5-kel
- Gödel szám (=végeredmény) helyett G.számozás (=eljárás)
- a Goldbach sejtés helyett kontinuumhipotézis
- 11. oldal: Hilbert 10. problémáját (1900) és Matijaszevics megoldását (1970)