

Egyenesektől való távolságokról

(Egy megjegyzés a B.3788.feladathoz)

April 28, 2008

TAVOLSAG3B.TEX, 2008.04.28.,01:12. (07.03.17)

A Kömal 2005.januári számában jelent meg az alábbi probléma:

B.3788. Adott az ABC háromszög. Mi azon P pontok mértani helye a háromszög belsejében, amelyeknek az AB oldal egyenesétől mért távolsága szám-tani közepe a BC és a CA oldalak egyenesétől mért távolságának?

Hasonló kérdést tesz fel a **Gordiusz** tesztkonkurzus 2005.megyei fordulójának 9. osztály **28.** feladata:

Adott két metsző egyenes és egy $d > 0$ távolság. Mi azon pontok halmaza az egyenesek síkjában, amelyeknek a két adott egyenestől mért távolságösszege d ?

Vizsgáljuk meg a problémát kissé általánosabban is:

1. ÁLTALÁNOSÍTOTT PROBLÉMA:

Legyenek adottak a síkon az $e_1, \dots, e_n$ tetszőleges egyenesek, továbbá az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, c tetszőleges (akár pozitív akár negatív) valós számok. Keresendő azon P pontok mértani helye, amelyekre

$$\alpha_1 \cdot d_1 + \dots + \alpha_n \cdot d_n = c \quad (1)$$

ahol d_i jelöli a P pontnak az e_i egyenestől való távolságát. $\square$

A fenti általános megfogalmazás nem csak a szögfelező egyenes, párhuzamos egyenesek középvonala, háromszög érintő körei középpontjai feladatát tartalmazza, hanem rengeteg egyéb problémát is (pl.a *Geometriai Feladatgyűjtemény* I. kötet 162, 163, 208, 209, 211, 228, 280, 281, 283, 310, 346-348, 376, 640, 750, 858, 859, 869, ... feladatai).

Az $\alpha_i = 0$ eset is megengedett: az e_i egyenessel nem kell foglalkoznunk.

Természetesen az (1) -hez hasonló egyenletekből álló *egyenletrendszer* megoldása a megfelelő mértani helyek metszéspontja(i).

Mint "megszállott" koordinátageometria-rajongó, gondolkodás nélkül (!) azonnal a Hesse képlet jut eszembe:

Hesse: A $P(x_0, y_0)$ pont előjeles távolsága az $e: Ax + By = C$ egyenestől

$$d_{Pe} = \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ahol d előjele aszerint pozitív vagy negatív, hogy P az egyenes által meghatározott félsíkok közül abban van-e, amerre az (A, B) normálvektor mutat vagy sem. $\square$

A képletet általában csak röviden $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ alakban idézik, azonban nekünk most szükségünk van az abszolútértékek felbontására.

A (1) feltétel tehát így írható:

$$\sum_{i=1}^n (\pm \alpha_i) \cdot \frac{A_i x + B_i y - C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c$$

azaz

$$x \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\pm \alpha_i) \cdot A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} + y \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\pm \alpha_i) \cdot B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c + \sum_{i=1}^n \frac{(\pm \alpha_i) \cdot C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \quad (2)$$

attól függően, hogy P éppen az egyenesek által meghatározott síkrészek közül melyik (véges vagy végtelen) síkrészben van (ezt mutatja α_i előjele).

A végeredmény pedig azonnal látszik:

2. TÉTEL: Az (1) probléma megoldása: Az egyenesek által alkotott **minden** síkrészben egy-egy egyenesdarab (szakasz vagy fél- vagy egész- egyenes), amely egyenesdarabok a síktartomány egyik határától másik határáig terjednek – sem több, sem kevesebb. Az egyenesdarabok zártak, azaz a síktartomány határával való metszetük is a mértani hely része.

Elfajuló esetben a mértani hely (egy-egy síkrészben) lehet üres halmaz vagy az egész síkrész is. $\square$

Az elfajuló esetekre később mutatunk példát. Az Olvasó gondolkozzon el azon, hogy miért *nincs* pl. olyan eset, amikor a mértani hely nem az egész síkrész, hanem annak csak egy kétdimenziós valódi részhalmaza.

A fenti eredmény alapján az (1) alakú problémákat már könnyen megoldhatjuk: mindössze csak a síkdarabok határain, vagyis az egyenesek szakaszain kell a mértani hely pontjait megkeresnünk, és a fenti állítás szerint az őket összekötő szakaszok alkotják a (teljes) mértani helyet.

Az elfajuló eseteket is már az egyenes-szakaszokon felismerhetjük: legalább kettő határoló szakaszon több pontja is van a mértani helynek, vagy egyiken sincs egyetlen pont sem. $\square$

De ez nem szép megoldás, és nem adja meg az egyenesdarabok jellemzését sem.

Az általános problémától nem is várom el, hogy csak *elemi geometriai* teljes és egyszerű diszkussziót találjon. Pár egyszerű, általában is hasznos észrevételt azonban igen.

3. ÁLLÍTÁS: Ha P_1 és P_2 mindketten kielégítik a (1) feltételt (azaz elemei a mértani helynek), ugyanabban a síkrészben vannak, akkor a P_1P_2 egyenesnek a megadott síkrészbe eső teljes darabja (a P_1P_2 szakaszon túli része is, egészen a síkrész határáig) a mértani helynek része.

Bizonyítás: Egyszerűen csak a párhuzamos szelők tételét kell alkalmaznunk. Jelölje $d_i^{(1)}$ és $d_i^{(2)}$ a P_1 illetve a P_2 pontoknak az e_i egyenesektől való távolságait. Ha a P pont $u : v$ arányban osztja a P_1P_2 szakaszt (ha nem belül van, akkor u és v közül valamelyik negatív), akkor P -nek az e_i egyenestől való távolsága

$$d_i = \frac{v \cdot d_i^{(1)} + u \cdot d_i^{(2)}}{u + v} \quad ,$$

a feltételek szerint

$$\alpha_1 \cdot d_1^{(1)} + \dots + \alpha_n \cdot d_n^{(1)} = c \quad ,$$

$$\alpha_1 \cdot d_1^{(2)} + \dots + \alpha_n \cdot d_n^{(2)} = c$$

és a fenti egyenletek $\frac{v}{u+v}$ illetve $\frac{u}{u+v}$ -szereseit összeadva éppen a (1) feltételt kapjuk. $\square$

Vigyázzunk: a fenti állításból *nem* következik, hogy a mértani hely minden síkrészben *legfeljebb* csak egy egyenes(darab)! Tekintsük például a következő példát:

4. Példa: (Geom.Fgy.I.347.) *Mi a mértani helye azon pontoknak, melyeknek egy szabályos háromszög oldalaitól való távolságai összege a háromszög magassága?*

Legyenek a háromszög csúcsai $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, ekkor az oldalegyenesek $a : y = 0$, $b : y = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$, $c : y = \sqrt{3} + \sqrt{3}x$.

A háromszög *belsejében* (2) a következőképpen fest:

$$y - \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad ,$$

rendezés után:

$$0 = 0 \quad .$$

Ez pedig ugye azt jelenti, hogy a háromszög belsejének *minden* pontja a mértani helyhez tartozik.

Egy másik síkrészben (no melyikben?) pedig:

$$-y + \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

azaz

$$-\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

vagyis üres halmaz. $\square$

Geometriailag az a legérdekesebb, hogy az egyes esetekben milyen alakzatok jönnek ki.

5. Az $n = 2$ eset: a teljes diszkusszió kellemes hétvégi (Kömal) feladat, ízelítőül pár gondolat. $c \geq 0$ nyilván feltehető.

Legyen az egyenesek metszéspontja M (a párhuzamos esettel most nem foglalkozunk). A mértani hely mindenképpen M -re (középpontosan) szimmetrikus alakzat.

Ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, akkor $c = 0$ esetén nyilván csak az M pont a mértani hely.

Tehát $c > 0$. Ekkor $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ miatt M középpontú paralelogrammát kapunk, melynek csúcsai M -től c/α_2 illetve c/α_1 távolságra vannak.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c = 0$ akkor M -re illeszkedő két, egymásra merőleges egyenes (azaz négy félegyenes) a mértani hely.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c > 0$ akkor e_1 egyenesen nincs pontja a mértani helynek, míg e_2 egyenesen két pontot könnyen megtalálunk: M -től c/α_1 távolságra vannak amiket jelöljünk Q_1, Q_2 -vel. E két pontból kiinduló félegyeneseket kapunk mértani helyként, melyek e_1 -gyel nem párhuzamosak és nem is metszik e_1 -et. $\square$

Szalkai István
Pannon Egyetem
Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu