Számosságok

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém, Matematika Tanszék

2008. november 3.

Szamoss1www.tex, 2008.09.28.

Ebben a rövid jegyzetben elsősorban a végtelen halmazok méretét, elemeinek *számát* próbáljuk meg "megszámolni", de számos tétel igaz véges halmazokra is. Megmutatjuk, hogy végtelen halmazok mérete is lehet "kisebb" és "nagyobb" is.

1. Definíciók

1. Definíció. ***(i)*** *Tetszőleges A és B halmazok* ***számossága egyenlő****, ha van köztük egy $f : A \longrightarrow B$ bijektív függvény (vagyis f injekív és szürjektív, vagyis kölcsönösen egy-egyértelmű ráképezés). Ennek jele: $|A| = |B|$.*
(ii) *Az A halmaz számossága* ***kisebb vagy egyenlő****, mint B számossága, jelben $|A| \le |B|$ ha van $f : A \longrightarrow B$ injekció (kölcsönösen egy-egyértelmű függvény).*
(iii) *Az A halmaz számossága* ***kisebb*** *mint B számossága, jelben $|A| < |B|$ ha $|A| \le |B|$ és $|A| \ne |B|$.* $\square$

2. Megjegyzés. *A* ***számosság****ot magát nem definiáltuk, csak az összehasonlítás módjait, mint pl. hosszúságokat is tudunk összehasonlítani méterrúd nélkül.* $\square$

3. Tétel. $=$ *alaptulajdonságai:* ***bármely*** *A halmazra*
$|A| = |A|$ *(reflexív),*
$|A| = |B|$ *pontosan akkor, ha* $|B| = |A|$ *(szimmetrikus),*
ha $|A| = |B|$ *és* $|B| = |C|$ *akkor* $|A| = |C|$ *(tranzitív),*
azaz $=$ ekvivalencia *("azonos értékű") reláció.* $\square$

4. Tétel. $\le$ *és* $<$ *alaptulajdonságai:* ***bármely*** *A halmazra*
$|A| \le |A|$ *de* $|A| \not< |A|$ *(reflexív ill. irreflexív),*
ha $|A| \le |B|$ *és* $|B| \le |A|$ *akkor* $|A| = |B|$ *(antiszimmetrikus)*[1)],
ha $|A| < |B|$ *akkor* $|B| \not< |A|$ *(aszimmetrikus),*

[1)] ez a Cantor-Bendixson tétel.

ha $|A| \leq |B|$ *és* $|B| \leq |C|$ *akkor* $|A| \leq |C|$ *(tranzitív),*
ha $|A| < |B|$ *és* $|B| < |C|$ *akkor* $|A| < |C|$ *(tranzitív),*
azaz $\leq$ rendezési *reláció,* $<$ szigorú rendezési *reláció.* $\square$

5. Példa. *Például a* ***véges számosságok*** *Neumann János szerint:*
$\underline{0} := \varnothing$,
$\underline{1} := \{\varnothing\}$,
$\underline{2} := \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$\underline{3} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
$\underline{4} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,
...
$\underline{n} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, ..., \underline{n-1}\} = \{...\}$, *($n \in \mathbb{N}$)* *(ún."Neumann-hagymák", ld. pl.* $\underline{16}$ *).* $\square$

6. Definíció. *(i) Egy tetszőleges A halmaz* ***véges****, ha számossága megegyezik* valamely $\underline{n}$ *halmaz ($n \in \mathbb{N}$) számosságával.*
(ii) Egy tetszőleges A halmaz ***végtelen****, ha számossága egyetlen* $\underline{n}$ *halmaz ($n \in \mathbb{N}$) számosságával sem egyezik meg.* $\square$

7. Tétel. *(Cantor,G.)* Tetszőleges *A halmaz hatványhalmazának számossága nagyobb A számosságánál, azaz*

$$|P(A)| > |A| \ . \quad \square$$

8. Megjegyzés. *(i) A fenti tétel véges és végtelen halmazokra egyaránt igaz, sőt még az üres halmazra is ! A tétel állítása szerint tehát* bármely *számosságnál létezik nagyobb számosság, vagyis nincs legnagyobb (véges vagy végtelen) számosság.*
(ii) Véges *halmazokra jólismert a*

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

összefüggés ($A = \emptyset$ is lehet). $\square$

9. Jelölés. ***Tetszőleges*** *A, B halmazok esetén jelölje*

$$B^A := \{f : A \to B \mid f \quad \textit{függvény}\}$$

az ***összes*** *$A \to B$ függvény halmazát.* $\square$

10. Megjegyzés. *(i)* ***Vigyázzunk:*** *a nyilak* ***"felülről lefelé"*** *mennek, valamint a függvények értelmezési tartománya az* ***egész*** *A halmaz, azaz $Dom(f) = A$.*
(ii) Véges *halmazokra jólismert a*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$$

összefüggés. $\square$

11. Lemma. *Tetszőleges A halmazra*

$$\left|\underline{2}^A\right| = |P(A)|$$

2. Megszámlálhatóan végtelen halmazok

12. Definíció. *(i) Az A halmaz* ***megszámlálható*** *(más szóval* ***felsorolható****), ha* $|A| \leq |\mathbb{N}|$.
(ii) $|A| = |\mathbb{N}|$ *esetén A -t* ***megszámlálhatóan végtelen****nek, vagy* ***felsorolhatóan végtelen****nek hívjuk, míg* $|A| < |\mathbb{N}|$ *esetén A* ***véges****.*
Ha a fenti két esetet nem akarjuk vagy nem kell megkülönböztetni, akkor egyszerűen csak ***megszámlálható****-t mondunk.*
(iii) $\mathbb{N}$ *számosságát* $\aleph_0$ *-al jelöljük:* $\aleph$ *a héber abc első betűje: "**alef**" .* □

13. Megjegyzés. *A fenti A halmaz elemei párbaállíthatók a természetes számok halmazával, vagyis A felírható*

$$A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \tag{1}$$

alakban. □

14. Tétel. *Tetszőleges A halmaz* **pontosan akkor** *megszámlálható (felsorolható), ha felírható (1) alakban.* □

15. Megjegyzés. *Más szavakkal: tetszőleges A halmaz* **pontosan akkor** *megszámlálható, ha elemei sorozatba rendezhetők, esetleges ismétlésekkel.* □

16. Tétel. *A természetes számok egyike sem állítható párba a természetes számok halmazával, vagyis a természetes számok halmaza végtelen.* □

17. Tétel. *Megszámlálható (véges vagy végtelen) halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható (véges vagy végtelen).* □

18. Tétel. ***Bármely H végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.***

Bizonyítás. Legyen $a_0 \in H$ tetszőleges, $a_1 \in H \setminus \{a_0\}$ tetszőleges, ... , $a_{n+1} \in H \setminus \{a_0, ..., a_n\}$ tetszőleges, ... Ekkor $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ a kívánt részhalmaz. ■

19. Lemma. *Ha A és B megszámlálhatóak, akkor $A \cup B$ is megszámlálható.*

Bizonyítás. Ha $A = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ és $B = \{b_0, b_1, ..., b_n, ...\}$, akkor

$$A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...\}$$

egy kívánt felsorolás. ■

20. Következmény. *(i)* $|H \cup A| = |H|$ *bármely H végtelen és A megszámlálható halmazokra.*
(ii) Ha $H \setminus A$ nem véges, akkor $|H \setminus A| = |H|$ *tetszőleges H bármilyen végtelen és A megszámlálható halmazokra.* □

21. Megjegyzés. *A fenti eredmények szerint a megszámlálhatóan végtelen számosság, vagyis* $\aleph_0$ *a* ***legkisebb végtelen*** *számosság.*

22. Tétel. ***(i) Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható:***

$$\left|\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right| \leq \aleph_0 \quad ha \quad |A_i| \leq \aleph_0 \ .$$

(ii) Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója akkor és csak akkor megszámlálhatóan végtelen, ha valamelyik megszámlálhatóan végtelen vagy végtelen sok nem üres halmaz van közöttük.
(iii) Megszámlálható halmazok Descartes -szorzata *is megszámlálható:*

$$|A \times B| \leq \aleph_0 \quad ha \quad |A|, |B| \leq \aleph_0 \ .$$

Bizonyítás.

$$\begin{tikzcd}
(a_0,b_0) \arrow[r] & (a_0,b_1) \arrow[dl] & (a_0,b_2) \arrow[r] & (a_0,b_3) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_1,b_0) \arrow[d] & (a_1,b_1) \arrow[ur] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & \cdots & \\
(a_2,b_0) \arrow[ur] & (a_2,b_1) \arrow[dl] & \cdots & & \\
(a_3,b_0) \arrow[d] & \cdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

$A \times B$ is megszámlálható

■

23. Definíció. *Tetszőleges* $A \neq \emptyset$ *halmazra legyenek*
(i) A hatványai : $A^0 := \{\emptyset\}$, $A^1 := A$, $A^n := A \times A \times ... \times A$ *(n -tényezős Descartes szorzat),* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ = A *elemeiből képezhető összes, véges sorozat (string) halmaza.* □

24. Lemma. *Ha* A *véges vagy megszámlálható, akkor* A^* *mindenképpen megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. A fenti tételek alapján. ■

25. Megjegyzés. *Azonban* A *elemeiből képzett* végtelen *hosszú sorozatok halmaza, vagyis* $A^{\aleph_0}$ *már nem megszámlálható: Cantor tétele szerint már*

$$\underline{2}^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| > \aleph_0 \ . \quad \square$$

26. Példa. *A következő halmazok megszámlálhatók (a fenti tételek felhasználásával HF):*
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^n$ *($n\in\mathbb{N}$),* $\mathbb{N}^*$,
$\mathbb{Q}[x]=$ *racionális együtthatójú polinomok,*
$\mathbb{A}=$ *algebrai számok* $=$ *rac. együtthatójú polinomok gyökei ,*
... □

3. Kontinuum számosságú halmazok

27. Definíció. $\mathbb{R}$ *számosságát kontinuum*[2] *-nak nevezzük és* $\mathfrak{c}$ *(gót kis c) -vel jelöljük, azaz*

$$\mathfrak{c}:=|\mathbb{R}|\ . \qquad \square$$

28. Tétel. ***(Cantor)***

$$|\mathbb{R}|>\aleph_0$$

Bizonyítás. (Cantor átlós módszere.) Tegyük fel indirekte, hogy $\mathbb{R}=\{f_0,f_1,...,f_n,...\}$, vagyis e felsorolás tartalmazza az **összes** valós számot. Legyen $q\in\mathbb{R}$ egy olyan valós szám, melynek i -edik tizedesjegye különbözik az f_i szám i -edik tizedesjegyétől. Ekkor $q\neq f_i$, így q nem szerepel a $\{f_0,f_1,...,f_n,...\}$ felsorolásban[3]. Ez ellentmondás, vagyis $\mathbb{R}$ elemeit tényleg nem lehet felsorolni. ■

29. Következmény. *Van nem algebrai valós szám.*
Az ilyen (irracionális) számokat ***transzcendens*** *(" valóságon túli") számoknak hívjuk.* □

30. Megjegyzés. ***(i) Egyszerűen belátható, hogy tetszőleges [(a,b)] intervallum (nyílt vagy zárt, véges vagy végtelen, félig vagy egészen) számossága megegyezik*** $\mathbb{R}$ ***számosságával.***
(ii) Tehát minden nem üres, nyilt intervallum tartalmaz transzcendens számot.

31. Tétel. $|\mathbb{R}|=\left|\underline{2}^{\mathbb{N}}\right|$. □

32. Megjegyzés. *A fenti tétel és Cantor 7 tételéből már következik a 28 tétel, de az ott közölt bizonyítás ezeknél egyszerűbb és szemléletesebb.* □

33. Példa. *Kontinuum számosságú halmazok:*
(i) bármely $[(a,b)]$ *nemüres intervallum (ld. 30),*
(ii) $\mathbb{R}^2$ *(két tizedesjegy -sorozat jegyeit felváltva leírva ("összefésülve") kapunk egy* $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *bijekciót),*
(iii) $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d=d$ *dimenziós tér pontjai,*
(iv) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=$ *(végtelen) valós számsorozatok,*

---

[2] "folytonos"

[3] A valós számok tizedestörtként való felírása nem egyértelmű, pl. $0,500...=0,499...$. Ezt a problémát elkerülhetjük, ha q jegyei 0 -tól és 9 -től különbözőek. □

(v) $\mathcal{C} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ ***folytonos*** *függvény*$\}$,
DE: $\mathcal{F} := \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$*az* ***összes*** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény*$\}$ *már* ***nem*** *kontinuum:*

$$|\mathcal{F}| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|\underline{2}^{\mathbb{R}}\right| = |P(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \ .$$

□

4. A Kontinuum Hipotézis

Láttuk, hogy $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Természetesen merül fel a kérdés, hogy van-e olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre

$$|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}| \quad ? \tag{2}$$

A XIX. század végén Georg **Cantor** német matematikus azt sejtette, hogy ilyen X halmaz nincs, ez a "Kontinuum-hipotézis":

34. Definíció. Kontinuum-hipotézis *(*Continuum-hypothesis*), röviden* KH *vagy* CH*: Nincsen olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre (2) teljesülne.* □

David **Hilbert** német matematikus a matematikusok 1900 -ban tartott konferenciáján *ezt* a problémát említette elsőnek, a XX század matematikai kutatásait meghatározó 23 nagy matematikai kérdés között. (Hamarosan kiderült, hogy ez a 23 probléma valóban meghatározó volt a XX. században, ld. pl.
HTTP://ALEPH0.CLARKU.EDU/~DJOYCE/HILBERT/PROBLEMS.HTML .)

Az $X \subset \mathbb{R}$ részhalmaz utáni több évtizedes kutatás eredményeképpen létrejött a *leíró halmazelmélet* (*descriptive set theory*).

Kurt **Gödel** német matematikus a 30-as években már bebizonyította, hogy CH **feltételezése** nem okoz ellentmondást a matematika szokásos (ZFC) axiómarendszerében.

A 60-as években pedig Paul **Cohen** amerikai matematikus igazolta, hogy CH **tagadása** sem okoz ellentmondást ZFC -ben.

A fenti két eredmény nem mond ellent egymásnak hanem kiegészítik egymást: tehát CH -t sem cáfolni, sem bizonyítani nem lehet a matematika ZFC axiómarendszerében, vagyis CH **független** (más szóval: **eldönthetetlen**) a matematika eszközeivel.

Gödel már 1930-ban bebizonyította, hogy a matematika *bármely* axiómarendszerében, vagyis nem csak ZFC -ben szükségképpen *léteznek* eldönthetetlen problémák. **Cohen** módszere pedig ma már a matematikus szakon tananyag, már a 70-es években (nem csak halmazelméleti) problémák százairól mutatták meg, hogy függetlenek ZFC -től.

5. Számosságok

35. Tétel. *(**Neumann János**): (i) Tetszőleges (véges vagy végtelen) κ számossághoz létezik **legkisebb**, κ -nál nagyobb λ számosság, azaz $\kappa < \lambda$ de nincs olyan μ amelyre*

$\kappa < \mu < \lambda$ *lenne. Ezt a* λ *számosságot* κ rákövetkezőjé *-nek (*successor*) nevezzük, és* $\boldsymbol{\kappa}^+$ *-al jelöljük.*
Számosságok nélkül, halmazokkal megfogalmazva: tetszőleges (véges vagy végtelen) A halmazhoz létezik olyan B halmaz, melyre $|A| < |B|$ *de* ***semmilyen*** *C halmazra* $|A| < |C| < |B|$.
(ii) Számosságok tetszőleges $\{\kappa_i : i \in I\}$ *halmazához létezik egyértelműen olyan* ***legkisebb*** λ *számosság, melyre*

$$\kappa_i \leq \lambda \quad \forall i \in I\ .$$

Ezt a λ *számosságot így jelöljük:*

$$\lambda := \lim_{i \in I} \kappa_i\ . \quad \square$$

36. Definíció. *(az "alefek"): Legyen* $\aleph_1 := (\aleph_0)^+$ *és általában* $\aleph_{n+1} := (\aleph_n)^+$ *ha* $n \in \mathbb{N}$ *, továbbá legyen* $\aleph_\omega := \lim_{n \in \mathbb{N}} \aleph_n$ *, majd* $\aleph_{\omega+1} := (\aleph_\omega)^+$*, és így tovább a "végtelenségig".* $\square$

5.1. Műveletek számosságokkal

Már eddig is használtunk néhány egyszerű összefüggést, amit most precízen megvizsgálunk.

37. Tétel. *Ha* $|A| = |A'|$ *és* $|B| = |B'|$ *akkor* $|A \times B| = |A' \times B'|$ *és* $\left|A^B\right| = \left|(A')^{B'}\right|$ *. Továbbá, ha A diszjunkt B -től és* A' *diszjunkt* B' *-től, akkor* $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ *.* $\square$

A fentiek alapján definiálhatjuk a számosságok közötti műveleteket:

38. Definíció. *(számosság-műveletek): Legyen* κ *és* λ *két tetszőleges (véges vagy végtelen) számosság. Legyen továbbá K és L tetszőleges, de diszjunkt halmazok, melyekre* $|K| = \kappa$ *és* $|L| = \lambda$ *. Ekkor legyen*

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &: = |K \cup L| \\ \kappa \times \lambda &: = |K \times L| \\ \kappa^\lambda &: = \left|K^L\right| \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Meglepőek az alábbi összefüggések:

39. Tétel. *Ha* κ *és* λ *közül legalább az egyik végtelen, akkor*

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= \max\{\kappa, \lambda\} \\ \kappa \times \lambda &= \max\{\kappa, \lambda\} \quad . \quad \square \end{aligned}$$

40. Tétel. *Ha* λ *végtelen, akkor* κ^λ *értéke független ZFC -től.* $\square$

41. Megjegyzés. *A fenti jelölésekkel CH a következőképpen is felírható:* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *.* $\square$

42. Tétel. *Tetszőleges A, B, C halmazokra*

$$\begin{aligned} \left|A^B \times A^C\right| &= \left|A^{B\cup C}\right| \\ \left|\left(A^B\right)^C\right| &= \left|A^{(B\times C)}\right| \end{aligned}$$

azaz számosságokra is érvényesek az

$$\begin{aligned} \alpha^\beta \times \alpha^\gamma &= \alpha^{\beta+\gamma} \\ \left(\alpha^\beta\right)^\gamma &= \alpha^{\beta\times\gamma} \end{aligned}$$

összefüggések.

Bizonyítás. (i) Gondoljuk végig a két 0-1 sorozat fésűs egyesítése által adott leképezést a 0-1 sorozatpárok halmazából az összes 0-1 sorozat halmazába.
(ii) Gondoljuk végig a 0-1 sorozatok sorozatainak halmaza és az összes 0-1 sorozat halmaza közti bijekciót. ∎

eof