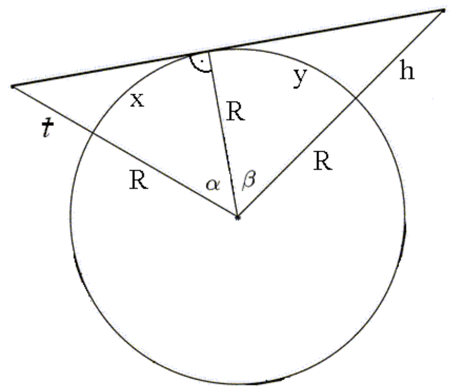
A Föld gömbölyű



$$(1)$$

Jelölések: h = szemünk magassága, t = a tárgy magassága, z = látótávolság, vagyis a tárgy talppontja z távolságra van a mi (létránk, stb.) talpunktól, amikor a csúcsa éppen eltűnik. A Föld sugara R = **6 370 000 m** .

a) h és t (szem- és tárgymagasság) adott, keresendő z .

Ekkor

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{R+t} \quad \text{és} \quad \cos(\beta) = \frac{R}{R+h} , \tag{2}$$

vagyis

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+t}\right) \quad \text{és} \quad \beta = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) , \tag{3}$$

ahonnan $0 \le \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ és

$$x = R\alpha \text{ (rad)} \quad \text{és} \quad y = R\beta \text{ (rad)} \tag{4}$$

vagyis

$$\boxed{z = x + y = R \cdot \left(\arccos\left(\frac{R}{R+t}\right) + \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)\right) .} \tag{5}$$

Például: $h = 2\ m$ és $t = 10\ m$ esetén

$\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+t}\right) = \arccos\left(\frac{6\ 370\ 000}{6\ 370\ 000 + 10}\right) \approx 0.001\ 772$ (rad),

$x = R\alpha = 6\ 370\ 000 \cdot 0.001\ 772 \approx 11288\ m = 11.288\ km$,

$\beta = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) = \arccos\left(\frac{6\ 370\ 000}{6\ 370\ 000 + 2}\right) \approx 0.000\ 792$ (rad),

$y = R\beta = 6\ 370\ 000 \cdot 0.000\ 792 \approx 5045\ m = 5.045\ km$,

tehát a $h = 10m$ magas hajót $x + y = 11.288 + 5.045 = 16.333\ km$ távolságban már egyáltalában nem látjuk, távcsővel, szélcsendes időben sem!

b) h, z adott ($z < R\pi$), keresendő t .

A fenti képletek alapján β és y kiszámolható, innen x és α is:

$$x = z - R \cdot \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) \quad , \quad \alpha = \frac{x}{R} \text{ (rad)}, \tag{6}$$

végül a (2) összefüggés alapján

$$\boxed{t = R \cdot \frac{1-\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = R \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - 1\right) = R \cdot (\sec(\alpha) - 1)} \tag{7}$$

ahol $\sec(\alpha) := \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$ a mérnökök kedvenc *szekáns* (*secant*) függvénye.

Például: Ha a $z = x + y = 70\ km$ távolságban levő hajót $h = 2\ m$ szemmagasságból szeretnénk látni, akkor

$x = 70\ 000 - 6\ 370\ 000 \cdot \arccos\left(\dfrac{6\ 370\ 000}{6\ 370\ 000 + 2}\right) = 64\ 952\ m$,

$\alpha = \dfrac{x}{R} = \dfrac{64\ 952}{6\ 370\ 000} = 0.010\ 197 \text{ (rad)},$

$t = R \cdot \left(\dfrac{1}{\cos(\alpha)} - 1\right) = 6\ 370\ 000 \cdot \left(\dfrac{1}{\cos(0.010\ 197)} - 1\right) = 331.19\ m$.

Tehát, egy 70 km távolságban (Balaton másik vége) már csak a 331.16 m (kb.100 emelet!) -nél magasabb hajót nem takarná el a Föld !

c) h, z adott, keresendő t .

Hasonlóan a b) esethez:

$$y = z - R \cdot \arccos\left(\frac{R}{R+t}\right) \quad , \quad \beta = \frac{y}{R} \text{ (rad)} \tag{8}$$

és

$$\boxed{h = R \cdot \left(\frac{1}{\cos(\beta)} - 1\right) = R \cdot (\sec(\beta) - 1)} \tag{9}$$

dr.Szalkai István, szalkai@almos.uni-pannon.hu , Veszprém, 2014.09.30.