Haladvány Kiadvány (szerk.Hujter Mihály)
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm

dr. Szalkai István: *Szemléltetés és becsapás*

szalkai@almos.uni-pannon.hu

Optikai csalódásokhoz hasonlóan *matematikai* csalódások is léteznek, sokszor találkozunk velük. Sajnos az sem ritka eset, hogy ezeket fel is használják gyanútlan emberekkel szemben, legyünk tehát elővigyázatosak!

Az alábbi összeállítást igyekeztem úgy megfogalmazni, hogy minimális (általános- vagy középiskolai) matematika tudással is érthető legyen.

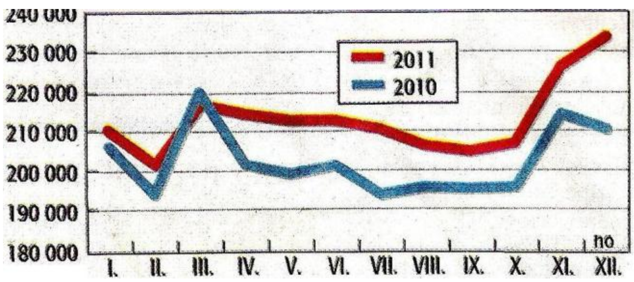
Mennyire ingadozik?

Egyik reggel két különböző hangvételű újságcikkel találkoztam, **ugyanarról** (!) az eseményről szenzációztak, de még hogyan!? "*Már hetek óta alig mozdul!*" - hangoztatta az egyik, és a baloldali ábrán valóban lapos a görbe. "*Ekkora ingadozást régen láttunk*" - így a másik, és a a jobboldali grafikonon valóban hatalmas ugrást és süllyedést látok. Mi tehát az igazság?

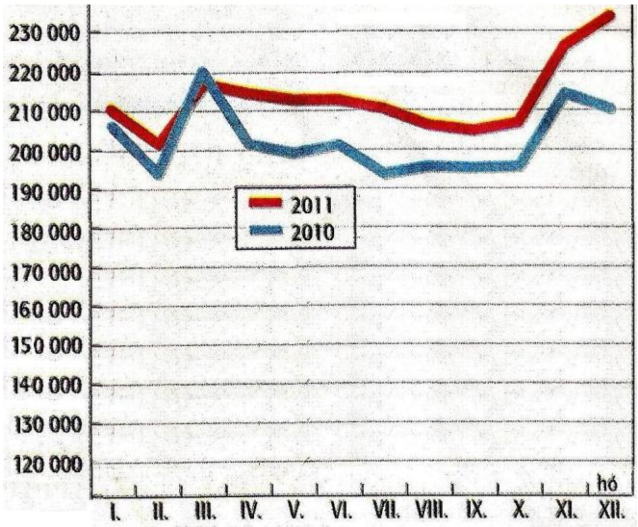
Ha alaposabban szemügyre vesszük a két grafikont, láthatjuk, hogy valóban ugyanazokat az adatokat ábrázolják, csak függőlegesen összenyomva az egyiken, jól széthúzva a másikon. A függőleges tengelyen a beosztások is sűrűbbek vagy ritkábbak (kisebb vagy nagyobb az egység). EZ az optikai csalódás, pontosabban **optikai csalás** magyarázata! A fenti újságcikkek írói vagy maguk is becsapódtak, vagy tudatosan választották az egyik vagy másik grafikontípust illusztrációnak!

Kedves Olvasóm,a jövőben ne hagyja magát így megtéveszteni! A tengelyeken vett beosztások mellett lényeges a mértékegység is: **ezer** mm ugye nem sokkal több **egyetlen** km -nél?!

Hasonlítsuk össze az alábbi két grafikont is! Amíg az egyiket szemléljük, takarjuk le egy kis papírral a másikat, és fordítva!



Íme a másik (fentit letakarni!):



A beosztások ugyanakkorák a függőleges tengelyeken, sőt a két színes grafikont egymásra is tehetjük, másolhatjuk, egybevágóak. Miért látjuk mégis az alsó ábrát kevésbé hullámozni, mint a felsőt? Mert az alsó, vízszintes (x) tengelytől messzebb vannak a színes görbék, így jobban érzékeljük az ábrázolt mennyiség nagy méretét és a *hozzá képest* (valóban) aránylag kicsi ingadozást. A felső ábrán pedig a függőleges tengely beosztása rögtön 180000 -nél kezdődik, ezért kerülnek a színes görbék nagyon közel a vízszintes tengelyhez, távolodásuk is legalább ennyi, és ezért érezzük a hullámzást aránylag nagynak! A valóságot pedig a második ábra közelíti jobban: minden mennyiséget a 0 -hoz kell viszonyítani! Az első ábrát a helytakarékosság indokolja, de tudatában kell lennünk a valóságot torzító hatásával!

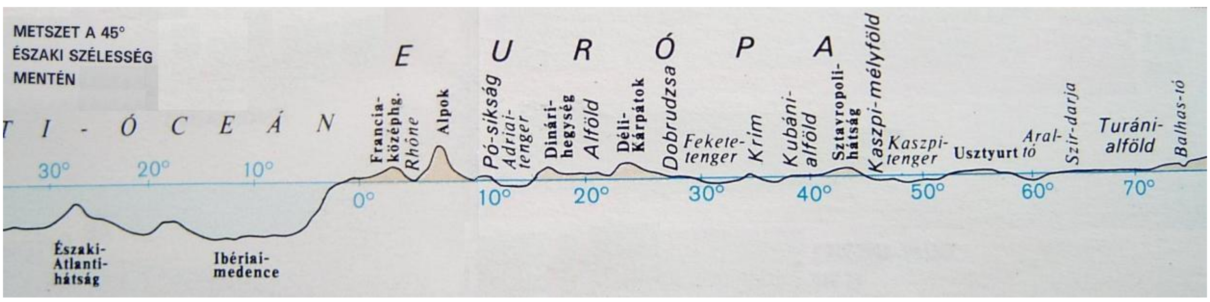
A fenti torzítások (manipulációk) széles körben ismertek a szakirodalomban, "*hazugságfaktor*" -nak (-tényezőnek) nevezik. Ugyanazokat a valós adatokat mutatja mindegyik grafikon, csak más súlyozással, más tálalással! Nekünk sem árt felkészülnünk, alaposan odafigyelnünk a részletekre: - a függőleges tengely beosztásaira!

Az előző problémákban említett torzítás nem újkeletű, csak szándékos megtévesztő használata ellen van kifogásunk! Alább néhány "békésebb" felhasználásával foglalkozunk.

Torzítások

A legegyszerűbb torzítás úgy jön létre, hogy egyik és másik irányban a nagyítás mértéke nem ugyanakkora, mint például henger alakú tükrök esetében (például a budapesti Vidámparkban láthatók az Elvarázsolt kastélyban, de magunk is készíthetünk ilyen tükröket: henger alakú doboz köré ragasszunk óvatosan alufóliát.)

Földrajzi atlaszokban találkozhatunk ilyesmikkel a leggyakrabban. Például földrészek vagy tengerek domborzati hosszmetszetében vízszintesen és függőlegesen rendszeresen különböző egységeket választanak.



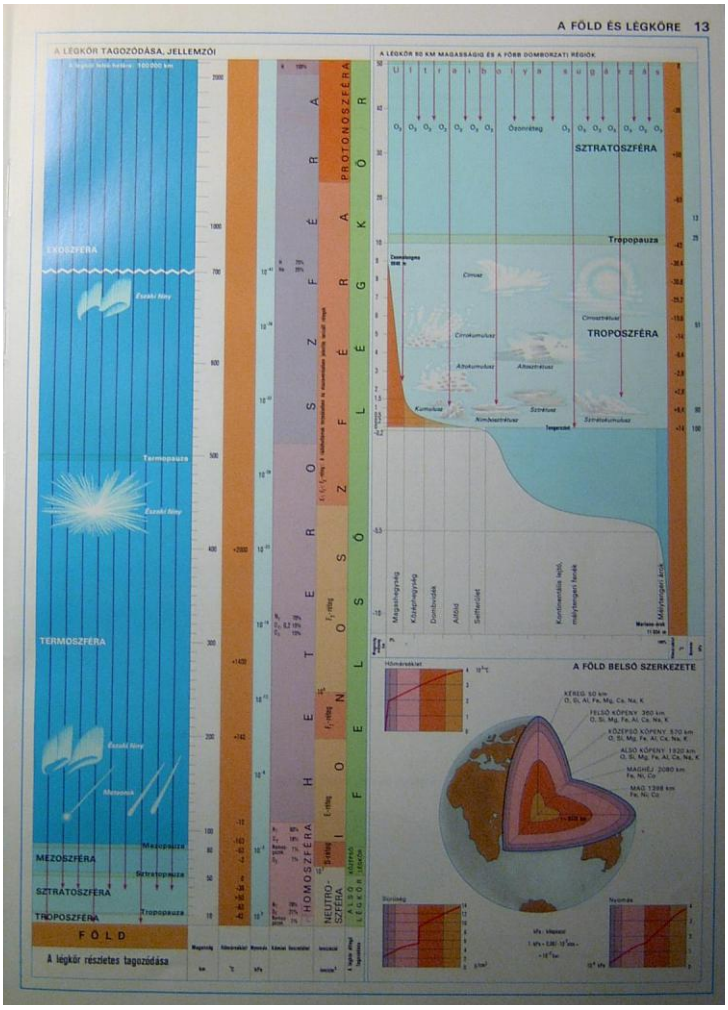
Nyilvánvalóan csak így fér rá a rajz a könyv lapjaira, de a hegyek és tengeri árkok vonulatai (felfelé vagy lefelé) és görbületei jól szemléltethetőek. Pontosabban, a többszáz kilométeres (vízszintes) földrész vagy tenger esetében a magassági (függőleges) eltérések összehasonlíthatatlanul aprók: még a 10 kilométert is alig érik el! Ezt a valóságot lekicsinyítve a többszáz cm vonalon kellene észrevennünk az 1-2 cm függőleges ingadozásokat!

Sok helyen láthatunk domború város- vagy Magyarország térképet: itt is a vízszintes (asztallap síkja) és függőleges méreteket kell módosítani a fentiek miatt.

Hasonló okok miatt nem teljesen arányos (hasonló) kicsinyítést alkalmaznak a *játékvasutaknál,* például szemmel láthatóan a sínek és a kerekek peremei aránytalanul nagyok a játékkocsik méreteihez képest. Ez a torzítás egyrészt onnan ered, hogy az asztali sínpálya aránytalanul rövid az állomásokhoz, tereptárgyakhoz és a vonathoz képest (kicsi az asztal). Ha a kocsik sebessége arányos lenne a sínpályához, akkor nagyon lassan közlekednének a vonatok: legalább 10-20 perc alatt jutnának el az asztal egyik végéről a másik végéig. Tehát a játékvonatok szokásos sebessége aránytalanul nagy, ami miatt meg kellett növelni a kerekek peremeit és a sínek magasságát is - de ez már inkább fizika.

Hasonló problémákkal találkozik az operatőr, aki tengeri csatát filmez viharos fürdőkádban. Ennek technikai és egyéb részleteiről sokfelé lehet olvasni, most inkább evezzünk más vizekre.

Nem egyenletes torzítások

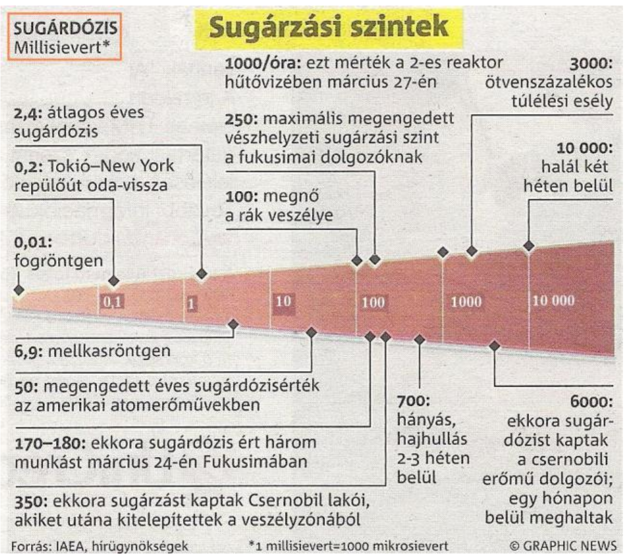


A még nagyobb távolságok (pl. kozmikus méretek) esetén már a tizedére- vagy ezredrészére történő csökkentés sem elegendő. A tér különböző részeit más-más léptékben kell ábrázolnunk, hogy minden lényeges részlet látható legyen. Nem kell Kecskemétre utaznunk (bár érdemes!), hogy a Naprendszer bolygóinak modelljeit a város különböző helyein felkereshessük , elég ismét a földrajzi nagy atlaszt kinyitnunk.

Például a légkör (szférák) ábrájánál a rajz alsó része 10km, a következő (ugyanekkora) rész már 100 km, utána (ugyanekkora rajzon) 1000km, stb. következik. Nyilván a légkör felfelé rohamos ritkulása az oka, hogy egyre nagyobb sávot tudunk / kell összesűríteni ugyanakkora rajzon!

No, és a mindennapokban én mikor utazom a Kozmosz vagy akár csak a légkör magasságaiba? - kérdezi kedves Olvasóm.

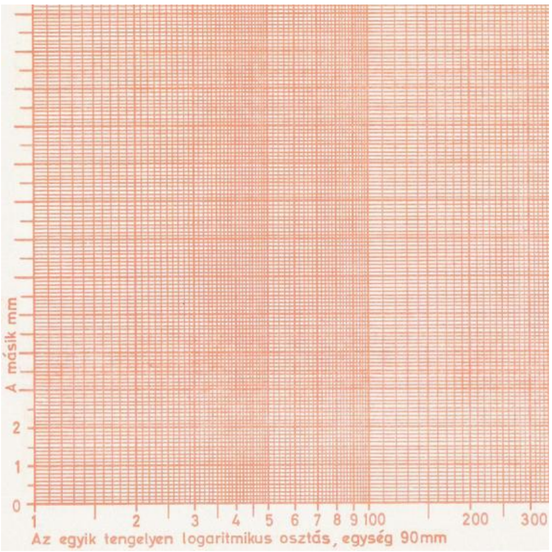
Nézzük meg *például* az alábbi ismertető ábrát az atom- és röntgen- sugárzásokról, amik ugye gyakran érintenek hétköznapi embereket. Mindkét sugárzás elég veszélyes, már az 1 millisievert alatti értékeket is pontosan kell mérnünk. Azonban a 100 feletti értékeknél +/- egy-két tucat millisievert már se nem oszt se nem szoroz, itt lehet (sőt kell is) nagyobb léptékben ábrázolni!

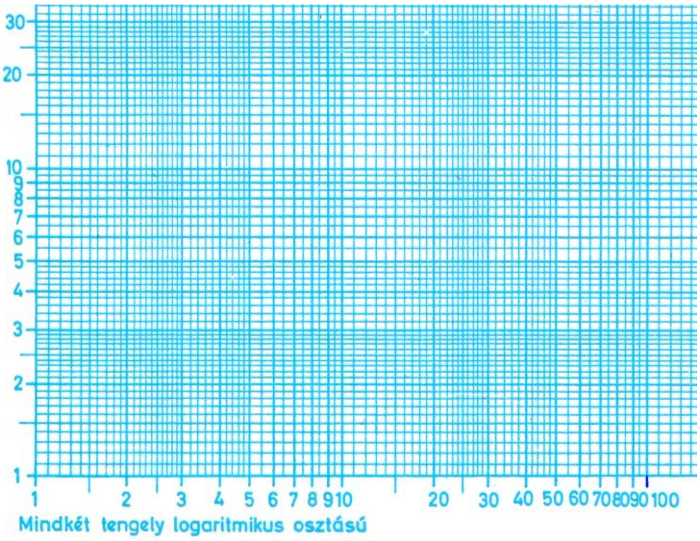


Hasonló torzított ábrázolással bizony sokfelé találkozunk, például a hangerősség (decibel) sem egyenletes mértékegység. Minden grafikonon érdemes a skálabeosztást is megnéznünk, ne csak az ábra "szépségében" gyönyörködjünk!

A *nem egyenletes* torzításokat **nemlineáris** ábrázolásoknak hívják (szó szerinti fordítás).

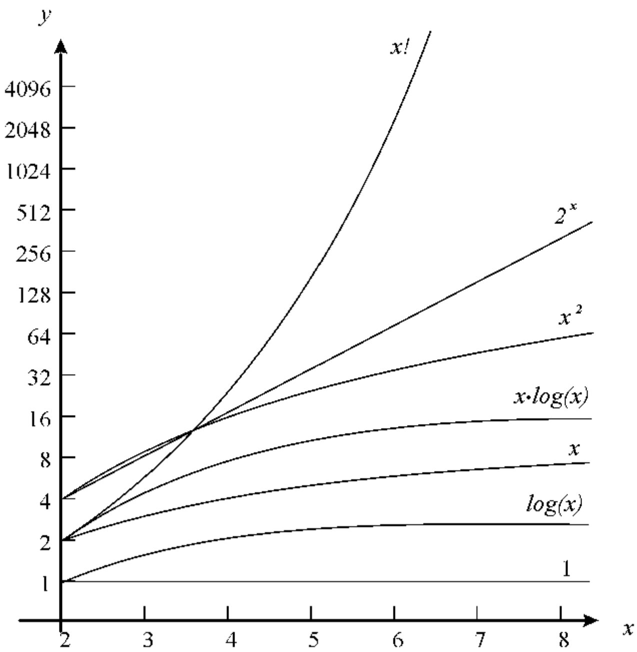
Nem is olyan régen még minden papírboltban kaphattunk a milliméterpapírhoz hasonló logaritmikus- és *szemi-* (félig-) logaritmikus- papírokat, ma az interneten kell keresnünk ilyesmiket, vagy a túloldalon (sárga = szemi-, kék = logaritmikus).





Szemilogaritmikus és logaritmikus koordinátarendszer

A mérnököket és a matematikusokat nem lepi meg, hogy az iskolásban megismert x, x^2, 2^x és egyéb függvényeket a hagyományos Descartes- koordinátarendszer helyett például *szemi-logaritmikus* rendszerben felrajzolva egészen más görbéket kapunk:



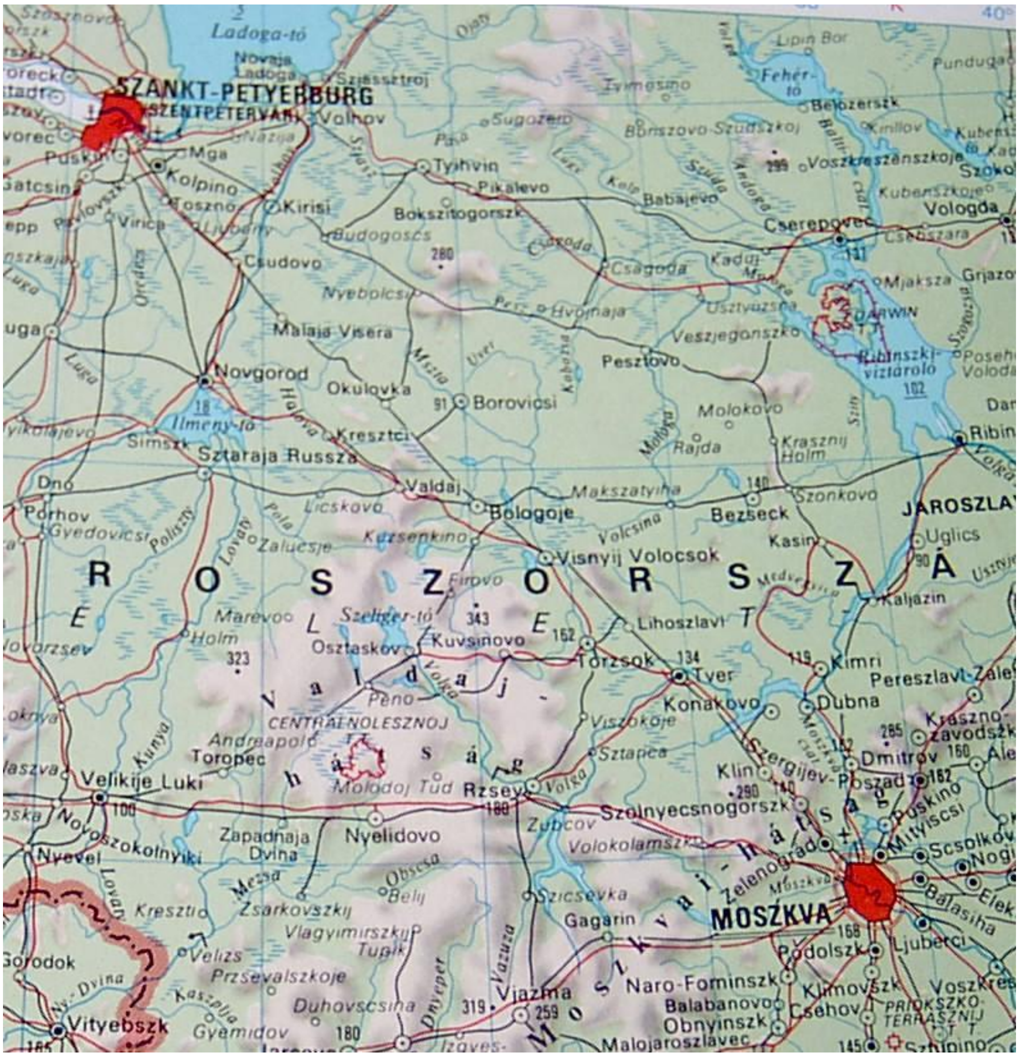
Külön témakör a **linearizálás módszere**: különböző függvénytípusok grafikonjai megfelelően torzított koordinátarendszerben (papíron) ábrázolva egyenesek, vagyis a függvények "kiegyenesednek". A fenti ábrán például a 2^x "exponenciális" függvény egyenesedett ki, ami a szokásos koordinátarendszerben egy felfelé ívelő görbe. Ez pedig nagy segítség fizikusoknak, vegyészeknek, statisztikusoknak, mérnököknek: a néhány mért és berajzolt értékhez egyszerűen csak egy egyenes vonalzót kell illeszteni, és máris megrajzolható a függvénygörbe, sőt a vizsgált jelenség adatai (paraméterei) is leolvashatók az ábráról. Persze, ma ezt már számítógép végzi (pl. Excell), de az elv még mindig a régi.

A *linearizálás* módszerről egy későbbi cikkünkben írunk bővebben.

Pihenésképpen álljon itt két anekdota, vonalzókkal kapcsolatban. (Az Interneten egyszerű kereséssel több tucat helyen olvashatunk róluk.)

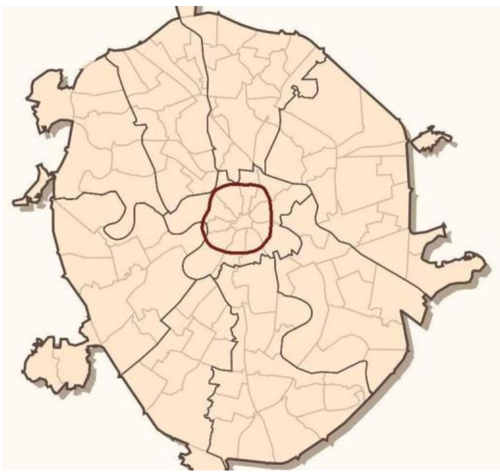
Cárvonalzó

A Moszkva és Szent Pétervár (régebben Leningrád) közötti vasútvonalat a térképen is érdemes megszemlélnünk: egy kis *ujjnyi félkör* kivételével egyenes. A hagyomány szerint a Cár tervezte a vasútvonalat: vonalzóval összekötötte a térképen Moszkvát és Pétervárt. Az építkezéskor pedig még azt a görbe vonaldarabot is hűen megvalósították, ahol az atyuska ujja lelógott a vonalzóról ... .



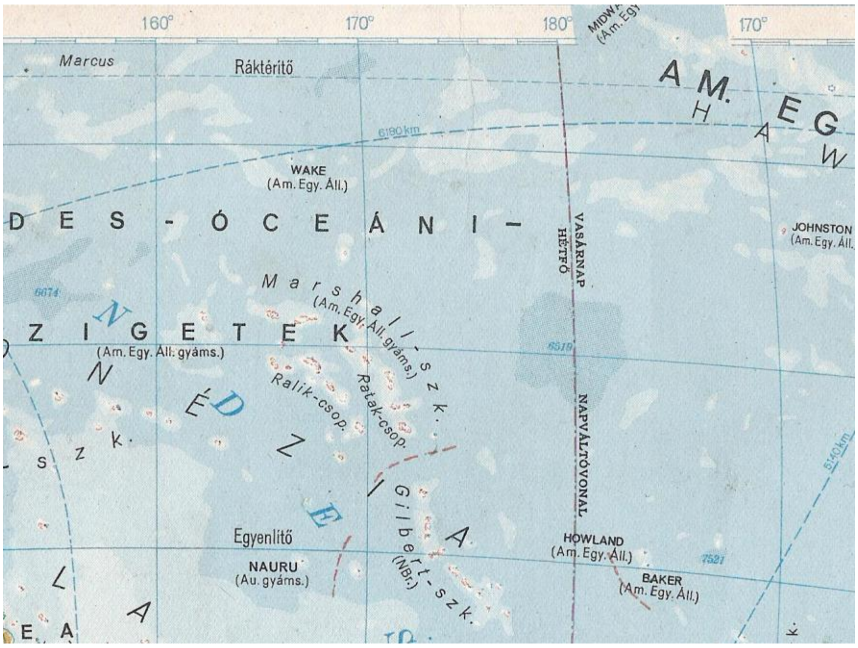
Sztálin kávéscsészéje

Moszkvában van egy kör alakú metróvonal ("Koltsevaya"), amit barna színnel jelölnek. Ezt a metróvonalat maga Sztálin tervezte, méghozzá úgy, hogy a térképre tette a kávéscsészéjét. Állítólag még ceruza sem kellett neki.

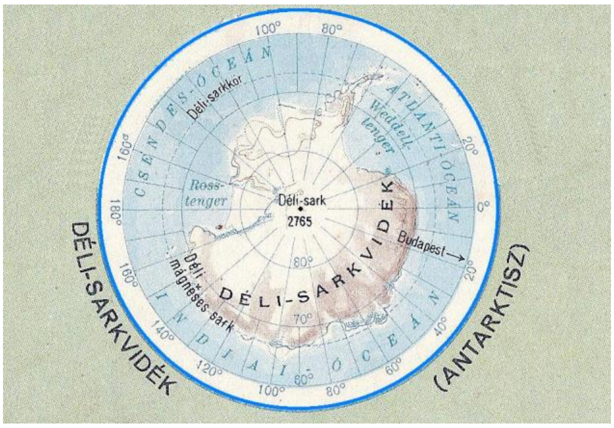


Koordinátarendszerek

Bizonyára mindenki észrevette, hogy a földrajzi *Hosszúsági* és *Szélességi* körök megfelelnek a **derékszögű** (Descartes-) koordinátáknak, még a távolság- és szögképletek is "működnek". Persze csak egy-két száz kilométerig, mert ugye a Föld gömbölyű.



De mi a helyzet a **polárkoordináta**-rendszerrel, amit *Toldi Miklóssal* szoktunk szemléltetni: *irány* és *távolság*. Az elnevezés és a rendszer logikájának magyarázatát ismét a földrajzi atlaszban találjuk: a (geometriai) déli- vagy északi sarkon (póluson) állva csak valamilyen irányba és valamilyen távolságra mehetünk. Sőt, az irányt jelző hosszúsági körök képei most (is) egyenesek, a távolságot jelző szélességi körök képei pedig a sark, vagyis az origó körüli koncentrikus (egyközepű) körök:



Még számtalan más koordinátarendszert (*ferdeszögű*, stb.) használnak a matematikai és mérnöki tudományokban, ezek leírására és használatára más cikkünkben térünk ki.

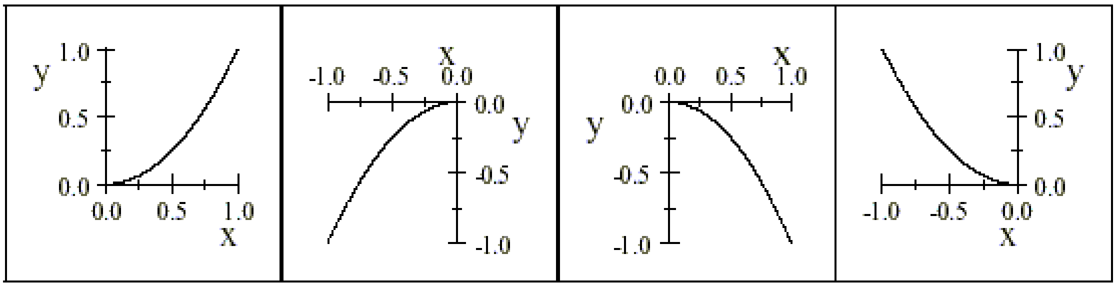
Csökken a növekedés

Ismerősöm kérdezte teljes rácsodálkozással:
"*Hogyhogy növekednek még mindig az árak, pedig állítólag az infláció csökken!?*"
Hasonló kérdéseket hallottam máshonnan is:
"*A párt támogatottságának csökkenése lassul, de mégis egyre kevesebb a szimpatizáns*" vagy "*a levegő lehűlésének üteme lassul, de mégis egyre hidegebb van*" vagy "*az autó egyre lassabban halad, mégis egyre messzebb van*".

Nos, mi is az "infláció"? Magyarul *áremelkedés* - amennyivel az ár nő. Nézzünk egy példát. Ha a TV most 100ezer Ft, jövő hónapban 150ezer Ft, két hónap múlva 175ezer Ft, akkor nyilvánvalóan végig **növekedett** az **ára**, vagyis végig volt infláció. Azonban az első hónapban 50 ezer Ft, a második hónapban már csak 25ezer Ft volt az **infláció**, ami valóban **csökkent**. Tehát hiába csökkent az árnövekedés *üteme*, attól még volt növekedés vagyis infláció!

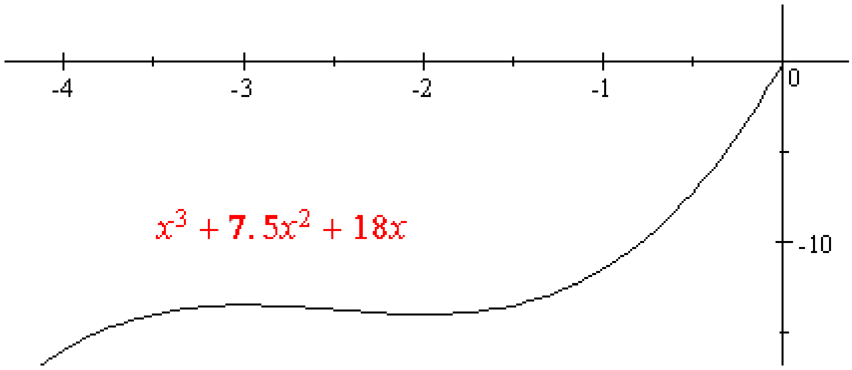
Hasonló magyarázattal érthetjük meg a többi, látszólagos ellentmondást is: ha valami változik (pl. levegő hőmérséklete, párt támogatottsága), esetleg csökken, attól még ő létezik! Ugyanez igaz a *változásokra* is: az sem szűnik meg, még ha kicsit változik is (kisebb vagy nagyobb lesz), attól még *változás* marad, sőt a *változás* előjele (iránya) is megmaradhat! Tehát az eredeti mennyiség kénytelen még mindig változni, ráadásul ugyanolyan irányban mint előtte, csak esetleg kisebb mértékben.

A *változó változású* mennyiségek grafikonjai többfélék lehetnek:



de figyeljük csak meg: mindegyik változásának *iránya* (nő vagy csökken) *nem változik*!
Megjegyzés: A fenti jelenséget a matematika nyelvén "**konvexitás-konkavitás**"-nak hívják, bővebb magyarázatot például a Szerző [SzI1]-[SzI5] egyetemi jegyzeteiben találhatunk, az alábbi két mozgókép is erről szól:
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/derivalt_novekszik.avi
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/derivalt_csokken.avi .

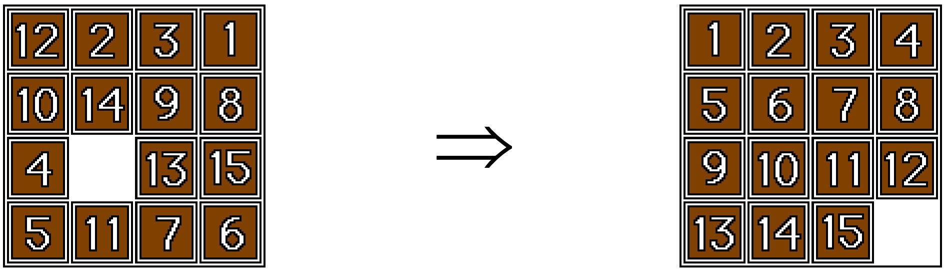
Nagyon sok függvény nagyon "lapos" (majdnem vízszintes) tud lenni, mint például az $f(x) = x^3 + 7.5x^2 + 18x$ függvény a $-4<x<-1$ intervallumon:



Pontos szélsőértékeit (maximum, minimum) a grafikonon lehetetlen megkeresni, akárhogyan is nyújtjuk meg vízszintesen vagy függőlegesen a grafikont. Emiatt van szükség felsőbb matematikai analitikus eszközökre, például a deriválásra.

A "kombinett" játék

Szokás "*15-ös*" játéknak is hívni: egy nagyobb négyzet alakú lapos dobozban 15 kisebb (negyedakkora) négyzet falapocska van, és egy üres hely. A lapocskákat kiborítjuk a dobozból és össze-vissza tesszük vissza, mint például a *bal oldali* ábrán:



Az üres hely melletti négy kis négyzet bármelyikét tetszés szerint tolhatjuk az üres helyre, persze ekkor az üres hely is "odébb vándorol", és így tovább. Csak ilyan tologatásokkal (nem újabb kiborítással) kell a kis négyzeteket sorba raknunk, mint a jobboldali ábrán.

Játékprogramot, leírást, elméleti tételeket, stratégiát, elemzést is rengeteget találunk a világhálón, lerágott csont, nem szaporítjuk a szót. Példának csak Csákány Béla [CsB], a Szerző [SzI0] műveit, [ÉT63/39] -t, vagy a http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/fifteen.shtml címet említjük.

Azonban érdemes megszívlelnünk a XIX. század hetvenes éveiben történt nagyon sok emberi tragédia tanulságát! **Sam** (Samuel) **Loyd** amerikai rejtvényszerző matematikus (1841-1911) az alábbi feladatot tűzte ki napilapokban a "*15 Puzzle*" játékkal kapcsolatban, és **1000** (akkori!) dollárt ígért az első helyes megfejtésért.

Feladat: *A lapocskák mind legyenek eredeti helyükön, mindössze a két legutolsó, a 14-es és a 15-ös legyen megcserélve. Csak tologatással cseréljük vissza ezt a két lapocskát, a többi is végül kerüljön vissza eredeti helyére!*

Sajnos az őrület végigsöpört egész Amerikán és Európán: emberek ezrei hanyagolták el vagy adták fel munkahelyüket, éjjelente utcai lámpák fényénél próbálkoztak, a tologatások sorrendjét próbálták memorizálni, sofőrök, pilóták, mérnökök, mozdonyvezetők, hajósok okoztak és szenvedetek rengeteg balesetet, farmerek hanyagolták el állataikat, sőt a Németországi Reichstagban (Parlament) a képviselők is csak ezzel foglalkoztak, Franciaországban több kárt okozott mint a dohányzás és az alkohol együttesen!
(Forrás: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Loyd.html .)

Sam Loyd 1000 dollárja ugyanis biztonságban volt: a fenti feladat **megoldhatatlan!** Matematikailag könnyen be lehet *bizonyítani* (tanítom is algebra óráimon!), sőt nagyon egyszerű módszerrel *bármelyik* kezdő állásról könnyen eldönthető, hogy megoldható vagy sem:

Tétel: *A 15-ös játék* ***pontosan akkor*** *oldható meg, ha a cserék (inverziók) száma* páros, *feltéve, hogy az üres négyzet a legalsó sorban van.*

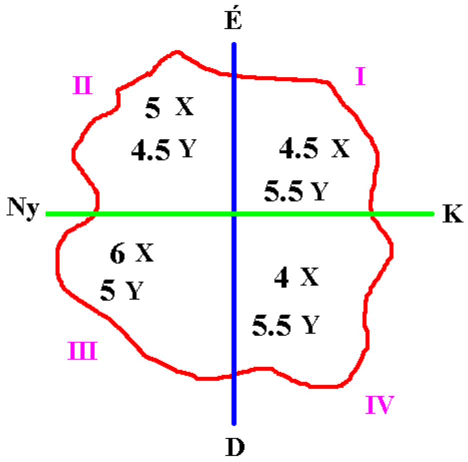
Hasonló módszerrel lehet a Rubik Ernő féle *Bűvös kocka* bármely állásáról (ha pl. szétesett és csak össze-vissza raktuk össze) eldönteni, hogy visszaforgatható-e. Erről részletesebben például Csákány Béla [CsB] könyvében olvashatunk.

Ha az Olvasót érdekli Sam Loyd néhány további rejtvénye, akkor "*Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*" könyvét ajánlhatjuk, ami például az alábbi címen található meg: http://www.mathpuzzle.com/loyd/ .

Választókörzetek

Függ-e a választás végeredménye attól, hogy hogyan osztják fel a várost választókerületekre? Miért függene, hiszen az X *illetve* Y *pártokra szavazók száma nem változik!*

Nézzünk egy egyszerű példát. Álljon a **V** város négy városi kerületből: I, II, III, IV, de csak két *választó*kerületre fogják osztani, vagyis összesen két képviselőt választanak. Legyen a két párt neve **X** és **Y**, és tegyük fel, hogy az egyes városi kerületekben a pártok támogatottsága az ábrán látható (ezer fő):



Melyik párt győz *ha* a választókerületek felosztása:

a) eset: **A** = I. és II.ker., **B** = III. és IV., vagyis a két választókerületet kelet-nyugati vonal határolja: **A** északon, **B** délen,

b) eset: **C** = II. és III.ker., **D** = I. és IV., ekkor a két választókerületet észak-déli vonal határolja: **C** nyugaton, **D** keleten.

Könnyű kiszámolni, hogy az

a) esetben mindkét választókerületben az **Y** párt győz (10>9.5 és 10.5>10, ezer fő), míg a

b) esetben a **C** választókerületben az **X** párt győz (11>9.5), **D** -ben pedig **Y** jelöltje (11>8.5, ezer fő) !

Tehát igenis van jelentősége annak, hogy hogyan osztjuk választókerületekre a várost, azaz a lakosságot!

Felmerül a kérdés: lehetséges -e olyan város és négy kerület, amikor az egyik esetben az **X** párt, a másik esetben pedig az **Y** pártot nyer *kétszer* ?

Jelölje $\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}$ az I. kerületben az X ill. Y pártra szavazók számát, hasonlóak legyenek az $\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{y_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{y_4}$ számok. A kívánt összefüggések:

(1) $x_1 + x_2 > y_1 + y_2\,,\qquad x_3 + x_4 > y_3 + y_4$

és

(2) $x_1 + x_3 < y_1 + y_3\,,\qquad x_2 + x_4 < y_2 + y_4\,.$

Az (1) illetve (2) egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk:

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > y_1 + y_2 + y_3 + y_4\,,$

és

(4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > y_1 + y_2 + y_3 + y_4\,,$

nyilvánvalóan (3) és (4) ellentmondanak egymásnak.

A fenti számolás azt mutatja, hogy az általunk tekintett egyszerű *"négy városi → kettő választási kerület"* modellben nem lehet egyszer az egyik, máskor a másik párt kétszer nyerő.

A bemutatott példa azért **megdöbbentő**, mert roppant egyszerű! Mindössze nyolc, majdnem akármilyen szám alkotja! A valóság sokkal bonyolultabb lehet, ráadásul nem csak négy városi (vagy járási) kerületből lehet választókörzeteket létrehozni, azaz egyik vagy másik pártot előnybe hozni ! Bonyolultabb modellekben ez viszont lehetséges, a találgatásokat és a számolgatásokat az Olvasókra bízzuk.

Norbert Herrmann [HN1] és [HN3] könyveiben választások különböző értékelési módszereit mutatja be.

Irodalom

[CsB] **Csákány Béla**: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon könyvtár sorozat, JATE Bolyai Intézet, Szeged, 1998.

[ÉT63/39] *Élet és Tudomány* újság, 1963 /39, 40, 42. számok

[HN1] **Herrmann, Norbert**: *Mathematik ist überall*, Oldenbourg Verlag, München, 2007.
[HN2] **Herrmann, Norbert**: *Können Hunde rechnen?* Oldenbourg Verlag, München, 2007.
[HN3] **Herrmann, Norbert**: *The Beauty of Everyday Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, 2011.
[SzI0] **Szalkai István**: *Algebra és számelmélet feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2005.
[SzI1] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis*, megjelenőben http://www.tankonyvtar.hu , 2011.
[SzI2] **Szalkai István, Koltay László**: *Analízis feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2009.
[SzI3] **Szalkai István, Mikó Teréz**: *A közgazdaságtan matematikai alapjai*, 2011, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf
[SzI4] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis feladatgyűjtemény I.*, megjelenőben, 2011, http://www.tankonyvtar.hu.
[SzI5] **Szalkai István, Dósa György**: *Kalkulus példatár informatikusoknak, II.*, megjelenő-ben, 2010, http://www.tankonyvtar.hu , http://tananyagfejlesztes.mik.uni-pannon.hu