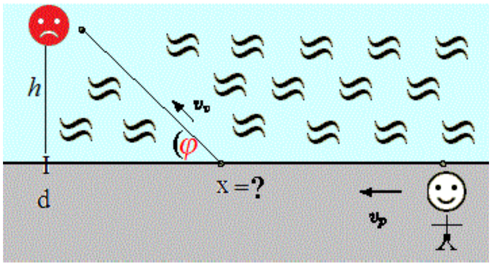
Fuldokló leggyorsabb kimentése



A következő méretekre van szükségünk:
$d =$ távolság a parton, $h =$ távolság a vízben, v_p és v_v a sebességek a parton illetve a vízben.
A következő adatokat fogjuk kiszámolni:
$x =$ vízbeugrás helye a parton, $\varphi =$ a vízbeugrás szöge a futás irányához képest.

A futás és úszás alatt eltelt idő összesen (függ x -től):

$$t(x) = \frac{x}{v_p} + \frac{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}{v_v} . \tag{1}$$

A $t(x)$ függvény minimumát keressük, amit csak differenciálszámítással ("deriválással") lehet megtalálni, ehhez középiskolás matematika fakultáció, vagy egyetemi matematika 1. kell:

$$\frac{dt}{dx} = t'(x) = \frac{1}{v_p} + \frac{-2(d-x)}{2v_v \cdot \sqrt{h^2 + (d-x)^2}} = 0 \tag{2}$$

melynek megoldása

$$\begin{aligned}
2v_v \cdot \sqrt{h^2 + (d-x)^2} &= 2(d-x)\, v_p && (3)\\
v_v^2 \cdot \left(h^2 + (d-x)^2\right) &= (d-x)^2 \cdot v_p^2 && (4)\\
v_v^2 \cdot h^2 &= (d-x)^2 \cdot \left(v_p^2 - v_v^2\right) && (5)\\
\frac{v_v^2 \cdot h^2}{v_p^2 - v_v^2} &= (d-x)^2 && (6)\\
\sqrt{\frac{v_v^2 \cdot h^2}{v_p^2 - v_v^2}} &= d - x , \quad \text{hiszen } 0 \le x \le d , && (7)\\
x_0 &= d - \sqrt{\frac{v_v^2 \cdot h^2}{v_p^2 - v_v^2}} && (8)
\end{aligned}$$

vagyis

$$\boxed{x_0 = d - \frac{v_v \cdot h}{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}}} . \tag{9}$$

Természetesen azt is meg kell vizsgálnunk, hogy x_0 -ban $t(x)$ -nek valóban minimuma van (házi feladat), és azt is, hogy $x_0 \in Dom(t)$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $0 \leq x_0 \leq d$. A (9) képlet alapján $x_0 \leq d$ automatikusan teljesül, tehát csak $0 \leq x_0$ ellenőrzése kell:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq d - \frac{v_v \cdot h}{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}} && (10) \\
\frac{v_v \cdot h}{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}} &\leq d && (11) \\
\frac{h}{d} &\leq \frac{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}}{v_v} = \sqrt{\frac{v_p^2 - v_v^2}{v_v^2}} = \sqrt{\left(\frac{v_p}{v_v}\right)^2 - 1} && (12)
\end{aligned}
$$

vagyis

$$\boxed{\frac{h}{d} \leq \sqrt{\lambda^2 - 1}} \tag{13}$$

ahol $\lambda = \dfrac{v_p}{v_v}$ a sebességek *aránya*. A (13) egyenlőtlenséget másképpen is írhatjuk:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{h}{d}\right)^2 &\leq \lambda^2 - 1 && (14) \\
\sqrt{\left(\frac{h}{d}\right)^2 + 1} &\leq \lambda = \frac{v_p}{v_v} && (15) \\
v_v \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{d}\right)^2 + 1} &\leq v_p && (16)
\end{aligned}
$$

Ez azt jelenti, hogy ha a (15), vagyis a (16) feltétel *nem* teljesül, vagyis nem tudunk elég gyorsan futni a parton, akkor azonnal a vízbe kell ugornunk!

A (9) képlet valóban megjegyezhetetlen, azonban φ -re sokkal egyszerűbb képlet adódik (tan a tangens függvény jele):

$$\tan(\varphi) = \frac{h}{d-x} = \frac{h}{\dfrac{v_v \cdot h}{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}}} = \frac{\sqrt{v_p^2 - v_v^2}}{v_v} = \sqrt{\left(\frac{v_p}{v_v}\right)^2 - 1} \ ,$$

vagyis

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\sqrt{\left(\frac{v_p}{v_v}\right)^2 - 1}\right) = \arctan\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ . \tag{17}$$

A (17) képlet azt jelenti, hogy φ CSAK a sebességek *arányától* (λ) függ. Tehát elegendő OTTHON előre lemérnük a parton futásunk és úszásunk sebességeinek *arányát* ($\lambda = \dfrac{v_p}{v_v}$), és ekkor a fenti képlet vagy az alábbi táblázat alapján már csak φ -t kell megjegyeznünk, és a parton mindenféle számolás nélkül (de egy szögmérővel a fürdőnadrágunkban) már futhatunk is! Addig kell futnunk, míg a part és a fuldoklóhoz húzott egyenes által bezárt szög éppen φ lesz, és ekkor kell a vízbe vetnünk magunkat!

λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
φ	24.62^o	33.56^o	39.72^o	44.42^o	48.19^o	51.32^o	53.97^o	56.25^o	58.24^o	60.00^o

λ	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
φ	61.56^o	62.96^o	64.23^o	65.38^o	66.42^o	70.53^o	75.52^o	78.46^o	80.40^o	81.79^o

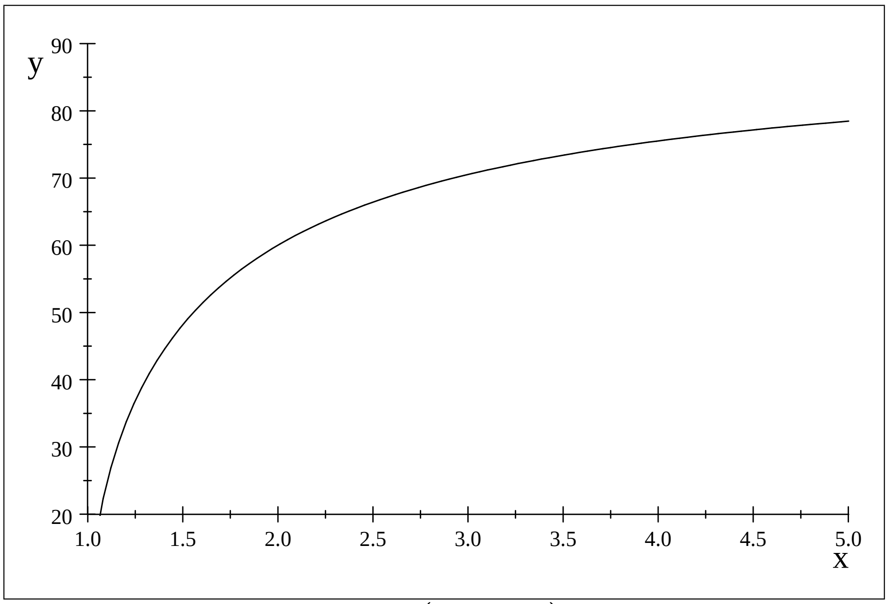
Megjegyzések: A fenti számolások sajnos nem "működnek" $\lambda = 1$, vagyis $v_p = v_v = v$ esetén, de ez esetben a legrövidebb idő megegyezik a legrövidebb út (egyenes Start és Fuldokló között) idejével, amikor is az idő $t = \dfrac{\sqrt{h^2+d^2}}{v}$ és a szög $\varphi = \arctan\left(\dfrac{h}{d}\right)$.

A feladat fizikai tartalma (kezdeti adatok) miatt azonban

$$\varphi \geq \arctan\left(\frac{h}{d}\right) , \tag{18}$$

vagyis lehet, hogy azonnal ugornunk kell, ha a (17) -ben megadott szög kisebb, mint $\arctan\left(\frac{h}{d}\right)$.

Észrevehetjük még, hogy a (18) egyenlőtlenség következik (13) és (17) -ből.



$\arctan\left(\sqrt{\lambda^2-1}\right)$

dr.Szalkai István, szalkai@almos.uni-pannon.hu , Veszprém, 2014.09.30.