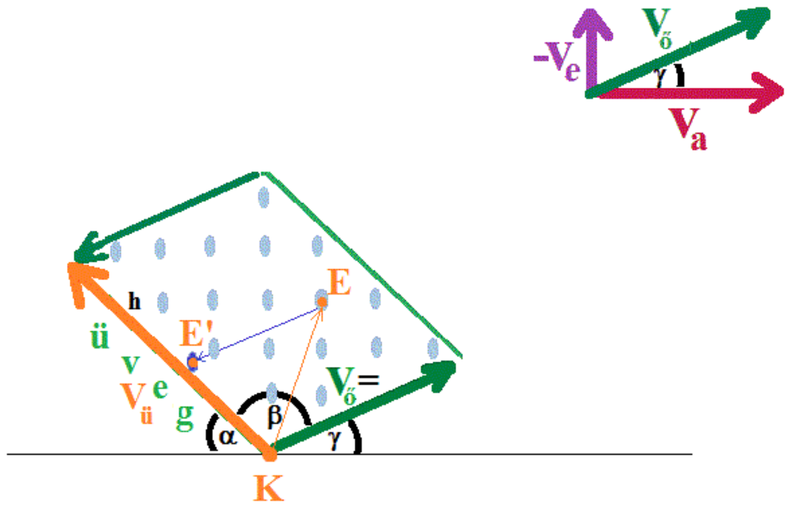
Esőcseppek a mozgó autó szélvédőjén



a) Az "eltalált" esőcseppek száma arányos az ablaküveg $\mathbf{v}_{ü}$ vektora és a (relatív) mozgás

$$\mathbf{v}_{ö} = \mathbf{v}_{a} - \mathbf{v}_{e} \tag{1}$$

vektor által meghatározott paralelogramma területével:

$$T = |\mathbf{v}_{ü}| \cdot |\mathbf{v}_{ö}| \cdot \sin(\beta) \quad . \tag{2}$$

Mivel (1) *vektorok* összege, ezért (2) változásának és maximumának (minimumának) meghatározása elemi (középiskolás) módszerekkel kicsit nehéz, emelt szinten érettségiző diákoknak azonban kötelező házi feladat!

Csak annyi világos, hogy (2) pontosan akkor lenne 0 , ha $\beta = 0^{o}$ vagy $\beta = 180^{o}$ lenne, de ez láthatóan sohasem teljesül.

A (2) -ben szereplő mennyiséget a $\mathbf{v}_{ü}$ és $\mathbf{v}_{ö}$ vektorok **vektoriális szorzatának** (pontosabban: annak *hosszának*) nevezik (lásd például:
http://hu.wikipedia.org/wiki/Vektori%C3%A1lis_szorzat).
Felhasználva a vektoriális szorzat tulajdonságait és az autó $\mathbf{v}_{a} = \lambda \cdot \mathbf{e}$ vektorának rögzített irányát $(0 \leq \lambda)$, (2) egyszerűbben vizsgálható:

$$\begin{aligned} T &= |\mathbf{v}_{ü} \times \mathbf{v}_{ö}| = |\mathbf{v}_{ü} \times (\mathbf{v}_{a} - \mathbf{v}_{e})| \\ &= |\mathbf{v}_{ü} \times \mathbf{v}_{a} + \mathbf{v}_{ü} \times (-\mathbf{v}_{e})| \\ &= |\mathbf{v}_{ü} \times \mathbf{v}_{a}| + |\mathbf{v}_{ü} \times (-\mathbf{v}_{e})| \\ &= \lambda \cdot |\mathbf{v}_{ü} \times \mathbf{e}| + |\mathbf{v}_{ü} \times (-\mathbf{v}_{e})| \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

mivel a **jobbkézszabály** szerint $\mathbf{v}_{ü} \times \mathbf{v}_a$ és $\mathbf{v}_{ü} \times (-\mathbf{v}_e)$ *egyirányú* vektorok.

$\mathbf{v}_{ü}$ és $\mathbf{v}_e$ rögzített vektorok, tehát T valóban nő λ növelésével, vagyis az autó sebességének növelésével, és T valóban csak akkor a legkisebb, ha $\lambda = 0$, azaz az autó áll!

b) Egy konkrét E esőcsepp pontosan akkor fog az ablaknak csapódni, ha a $\overrightarrow{KE}$ vektor **konvex** lineáris kombinációja a $\mathbf{v}_{ü}$ és $\mathbf{v}_{ö}$ vektoroknak, vagyis

$$\overrightarrow{KE} = x \cdot \mathbf{v}_{ü} + y \cdot \mathbf{v}_{ö} \ , \tag{4}$$

ahol az x, y együtthatók 0 és 1 közöttiek:

$$0 \leq x, y \leq 1 \ . \tag{5}$$

Mivel a (4) egyenletrendszerben a $\overrightarrow{KE}$, $\mathbf{v}_{ü}$ és $\mathbf{v}_{ö}$ vektorok ismertek, ezért x és y könnyűszerrel meghatározhatók. Az (5) feltétel teljesülése esetén az E esőcsepp E' becsapódási helye is könnyen meghatározható:

$$E' = E + (-y) \cdot \mathbf{v}_{ö} \ .$$

dr.Szalkai István, szalkai@almos.uni-pannon.hu , Veszprém, 2014.10.30.