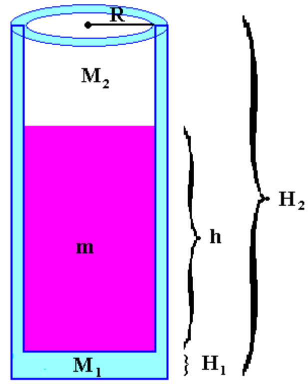
feldol-2a.tex

Folyadékkal töltött henger alakú pohár súlypontja



A következő jelöléseket használjuk:

R a pohár *belső* átmérője, v a falvastagság (azaz $R+v$ a *külső* átmérő),
ϱ_F és $\varrho_ü$ a folyadék ill. az üveg *sűrűsége*,
M_1 és H_1 a pohár *aljának* tömege és magassága,
M_2 és H_2 a pohár *oldalának* tömege és magassága,
m és x a pohárban levő *folyadék* tömege és magassága.

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_1 &= (R+v)^2 \cdot H_1 \cdot \pi \cdot \varrho_ü \\ M_2 &= \left[(R+v)^2 - R^2\right] \cdot H_2 \cdot \pi \cdot \varrho_ü \\ m &= R^2 \cdot \pi \cdot x \cdot \varrho_F \ . \end{aligned} \tag{1}$$

A folyadékkal töltött pohár S súlyontja a három fenti rész súlypontjainak *súlyozott számtani közepe*. Mivel a három rész forgásszimmetrikus, ezért súlypontjaik a henger forgástengelyére esnek, tehát S is ezen a forgástengelyen van. Csak S *magasságát* kell kiszámolnunk, ami a fentiek szerint a három súlypont súlyozott számtani közepe:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\frac{H_1}{2} \cdot M_1 + \left(H_1 + \frac{H_2}{2}\right) \cdot M_2 + \left(H_1 + \frac{x}{2}\right) \cdot m}{M_1 + M_2 + m} \\ &= \frac{\frac{H_1}{2} \cdot M_1 + \left(H_1 + \frac{H_2}{2}\right) \cdot M_2 + \left(H_1 + \frac{x}{2}\right) \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \varrho_F \cdot x}{M_1 + M_2 + R^2 \cdot \pi \cdot \varrho_F \cdot x} \ . \end{aligned} \tag{2}$$

A fenti képletben x a változó mennyiség, az $S(x)$ függvény szerkezete (a lényeget kiemelve)

$$S(x) = \frac{a + bx + cx^2}{d + ex} \tag{3}$$

ahol

$$\begin{aligned} a &= \frac{H_1}{2} \cdot M_1 + \left(H_1 + \frac{H_2}{2}\right) \cdot M_2 \ , \\ b &= H_1 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \varrho_F \ , \\ c &= \frac{R^2 \cdot \pi \cdot \varrho_F}{2} \ , \\ d &= M_1 + M_2 \ , \\ e &= R^2 \cdot \pi \cdot \varrho_F \end{aligned} \tag{4}$$

konstansok.

$S(x)$ minimumát differenciálszámítással kereshetjük meg.

$$S(x)' = \frac{(b + 2cx) \cdot (d + ex) - e \cdot (a + bx + cx^2)}{(d + ex)^2} = \frac{ctx^2 + 2cdx + (bd - ae)}{(d + ex)^2} \ ,$$

melynek gyökei

$$x_{1,2} = \frac{-2cd \pm \sqrt{(2cd)^2 - 4ce(bd - ae)}}{2ce} = \frac{-cd \pm \sqrt{c^2d^2 - cebd + cae^2}}{ce} \ .$$

$x_1 < 0$ míg x_2 -ben az $S(x)$ függvénynek valóban minimuma van (ellenőrizendő!).

Tehát a *rendszer* súlypontjának magassága minimális, ha a *folyadék* magassága

$$\boxed{\text{x}=\frac{\sqrt{c^2d^2 - cebd + cae^2}}{ce}\text{-}\frac{d}{e}} \ , \tag{5}$$

majd visszahelyettesítve az eredeti adatokat (4) -ből megkapjuk a folyadék keresett optimális magasságát.

dr.Szalkai István, szalkai@almos.uni-pannon.hu , Veszprém, 2014.09.30.