

A közgazdaságtan matematikai alapjai
6. gyakorló feladatsor
Differenciálszámítás

1. **Feladat.** A definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát az adott pontban!

- (a) $f(x) = x^2$ $x_0 = 2, -3, a$
 (b) $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 2, 4, a (> 0)$
 (c) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ $x_0 = 2, -3, a (\neq 3)$

2. **Feladat.** Hol differenciálható a következő függvény?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{ha } x \leq 0 \\ (x+1)^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{ha } x \leq 0 \\ 0, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

3. **Feladat.** Differenciálható-e az alább megadott $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az a helyen? Ha igen, adjuk meg $f'(a)$ -t!

- (a) $f(x) = |x-3| \cdot (x-3)$ $a = 3$
 (b) $f(x) = |x|\sqrt[3]{x}$ $a = 0$
 (c) $f(x) = (1+|x|)^2$ $a = 0$
 (d) $f(x) = |1+x|^3$ $a = -1$
 (e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 1 \\ x^3, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$ $a = 1$
 (f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$
 (g) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$
 (h) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$
 (i) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$
 (j) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 1 - x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ $a = 0$

4. **Feladat.** Differenciálható-e az $f(x) = \operatorname{tg}|x - \frac{\pi}{2}|$ függvény a $\frac{\pi}{2}$ helyen ill. a $\frac{\pi}{4}$ helyen?
5. **Feladat.** Határozzuk meg az a, b, c paraméterek értékét úgy, hogy a függvény mindenütt differenciálható legyen:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b, & \text{ha } x < 2 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 2ax^2 - 12x + c, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

6. **Feladat.** Írjuk fel az alábbi $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények deriváltját!

(a) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$	(b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	(c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
(d) $f(x) = x \cdot \sin(x)$	(e) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)$	(f) $f(x) = x^5 \cdot 5^x$
(g) $f(x) = x \cdot \ln(x)$	(h) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	(i) $f(x) = \frac{6x+3}{4x-3}$
(j) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$	(k) $f(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$	(l) $f(x) = (\sqrt{x} + 7)^6$
(m) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$	(n) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$	(o) $f(x) = \operatorname{tg}(x^3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$
(p) $f(x) = e^{3x-7}$	(q) $f(x) = 2^{x+\sqrt[3]{x}}$	(r) $f(x) = x^x$
(s) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	(t) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$	(u) $f(x) = x^{\operatorname{tg}(x)}$
(v) $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{x^2 + 1}$	(w) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+x^2}\right)$	(z) $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)}$

7. **Feladat.** Legyen $f(x) = \sin^2(x)$. Határozzuk meg $f^{(5)}(x)$ és $f^n(x)$ -et!

Jó munkát!