Nevezetes véletlen kísérletek

1. Egymástól függetlenül, tízszer feldobunk kettő szabályos érmét. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
   a. pontosan háromszor dobunk kettő fejet,
   b. legfeljebb egyszer dobunk kettő fejet,
   c. legalább ötször dobunk egy fej, egy írást,
   d. ötödikre dobunk először két írást.

2. Egymástól függetlenül, végtelen sokszor feldobunk kettő szabályos érmét. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
   a. huszadszor dobunk először kettő írást,
   b. a második és a hatodik dobás között lesz először kettő fej,
   c. páros számú dobásnál lesz először kettő fej.

3. Egymástól függetlenül, tízszer feldobunk három szabályos kockát. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
   a. pontosan kétszer dobunk csupa páros számot,
   b. legfeljebb ötször dobunk úgy, hogy a dobott számok összege 5,
   c. legalább négyszer dobunk csupa prímszámot,
   d. egyszer sem dobunk két ötöst, egy hatost,
   e. tizedikre dobunk először három hatost.

4. Egymástól függetlenül, végtelen sokszor feldobunk három szabályos kockát. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
   a. negyedszerre dobunk először csupa különböző számot,
   b. a hatodik dobás után lesz először három hatos,
   c. hárommal osztható számú dobásnál lesz először két ötös, egy hatos
   d. $(m+n)$-edikre dobunk először három hatost, feltéve, hogy m-nél több dobás után dobunk először három hatost $(m,n \in \mathbb{N}^+)$.

5. Tekintsünk egy véletlen kísérlethez tartozó $p \in]0,1[$ valószínűségű A eseményt. Egymástól függetlenül, végtelen sokszor megismételve a kísérletet, jelölje A_n azt az eseményt, hogy az A először az n-edikre következik be $(n \in \mathbb{N}^+)$. Igazolja, hogy $P(A_{m+n} \mid \bigcup_{k>m} A_k) = P(A_n)$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$.

6. Hány hétig kell játszani egy lottószelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer hármasunk legyen, 0,1-nél nagyobb legyen?

7. Ketten felváltva dobnak egy szabályos érmével. Az nyer, aki először dob fejet. Mekkora a valószínűsége, hogy
a. a kezdő nyer,
b. a másodiknak dobó nyer?

8. Egy 10 kérdésből álló teszt-rendszerű vizsgánál (bármely kérdésre igen vagy nem a válasz) mekkora a valószínűsége annak, hogy a vizsgázók csak találgatással a kérdések legalább 70%-ára helyes választ adnak?

9. Megfigyelünk 2000 égőt, amelyek egy nap alatt egymástól függetlenül 0,001 valószínűséggel égnek ki. Mekkora a valószínűsége, hogy a megfigyelt napon pontosan 10 ég ki? Adjuk meg a pontos eredményt, majd közelítsünk Poisson eloszlással.

10. Egy újságárus azt tapasztalja, hogy a vevőinek a száma egy negyedóra alatt átlagosan 10. Mekkora a valószínűsége, hogy egy megfigyelt negyedórában
a. a vevők száma 8 és 11 között lesz,
b. legfeljebb 5 vásárlója lesz,
c. legalább 6 vevője lesz?

11. Magyarországon egy évben átlagosan 1600 ikerpár születik. Mekkora a valószínűsége, hogy Magyarországon január 1-én ikrek születnek?

12. Legyenek $N \geq 2$, $1 \leq M \leq N-1$ és $1 \leq n \leq \min(M, N-M)$ egészek. Igazolja, hogy ha $M, N \to \infty$, $\frac{M}{N} \to p$, akkor rögzített n-re

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \longrightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Mit olvashatunk ki ebből a mintavételekkel kapcsolatban?