Események, valószínűség

1. Legyenek A, B és C események. Igazolja, hogy

a. $A = A \cup (A \cap B)$,

b. $(A \cap B^c) \cup B = A \cup B$,

c. $(A \cup B) \cap B^c = A \setminus B$,

d. $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Fejezze ki az A, B és C eseményekkel az alábbi eseményeket:

a. csak az A következik be,

b. az A és a B bekövetkezik, de a C nem,

c. mind a három esemény bekövetkezik,

d. a három esemény közül pontosan az egyik következik be,

e. legfeljebb az egyik következik be,

f. egyik esemény sem következik be,

g. legalább kettő esemény bekövetkezik.

3. Egy épületben két lift van. Az A esemény jelentse azt, hogy egy megfigyelt napon az első lift működik, a B esemény pedig az, hogy a második működik. Fogalmazza meg, mit jelentenek a következő események:

a. B^c, b. $A \cup B$, c. $A \cap B$, d. $A^c \cap B$, e. $A \setminus B$, f. $(A \cup B)^c$,

g. $(A \cap B)^c$, h. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Egy üzletben három pénztárgép van. Az A esemény jelentse azt, hogy egy megfigyelt napon az első pénztárgép működik, a B esemény azt, hogy a második működik, a C pedig azt, hogy a harmadik működik. Fogalmazza meg, mit jelentenek a következő események:

a. $A \cup B \cup C$, b. $A \cap B \cap C$, c. $A^c \cup B^c \cup C^c$, d. $A^c \cap B^c \cap C^c$,

e. $A \cap B \cap C^c$, f. $A^c \cap B \cap C^c$, g. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

5. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Igazolja, hogy

a. $A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A^c) = 1 - P(A)$,

b. $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, és $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

c. $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

6. Egy véletlen kísérlettel kapcsolatos A, B és C eseményeket tekintve a következő valószínűségek ismertek:

i. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}3$; $P(B \cap C) = 0{,}15$; $P(A \cap C) = 0{,}1$; $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$.

ii. $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}4$; $P(B \cap C) = 0{,}2$; $P(A \cap C) = 0{,}32$; $P(A \cap B \cap C) = 0{,}16$.

a. Adjon meg olyan valószínűségi mezőket, amelyekben a fenti valószínűségek érvényesek valamely A, B és C eseményekre.

b. Legyen az i.-nél $P(A) = 0{,}7$; a többi valószínűség pedig változatlan. Mit mondhatunk ebben az esetben az a.-beli problémáról?

c. Számítsa ki:

c_1. $P(A^c)$ c_2. $P(A \cup B)$ c_3. $P((A \cup B)^c)$ c_4. $P(B^c \cap C^c)$

c_5. $P(A^c \cup C^c)$ c_6. $P(B \setminus C)$ c_7. $P(C \setminus A)$ c_8. $P(A \cup B \cup C)$

c_9. $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ c_{10}. $P((A \cap B) \cup C)$.

7. Legyenek A, B, C és D nemüres halmazok, amelyek páronként diszjunktak, és legyen $\Omega := A \cup B \cup C \cup D$.

a. Adja meg az A, B, C és D halmazok által generált Ω-beli $\mathcal{A}$ σ-algebrát.

b. Legyen $0 \leq p_1, p_2, p_3, p_4$, amelyekre $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. Igazolja, hogy létezik pontosan egy olyan $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ valószínűségi mérték, amelyre $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$, $P(C) = p_3$ és $P(D) = p_4$.

8. Legyenek A, B és Ω halmazok, amelyekre $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B^c \neq \emptyset$, $A^c \cap B \neq \emptyset$, és $A \cup B \subsetneq \Omega$.

a. Hány elemű az A és B halmazok által generált Ω-beli $\mathcal{A}$ σ-algebra?

b. Legyen $0 < p_1, p_2 < 1$. Igazolja, hogy létezik pontosan egy olyan $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ valószínűségi mérték, amelyre $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$ és $P(A \cap B) = p_1 p_2$.

/A 7. feladat segíthet a megoldásban./

9. a. Legyen $P(A) = \frac{3}{4}$ és $P(B) = \frac{1}{3}$. Igazolja, hogy $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

b. Igazolja, hogy $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$, és $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

10. Legyen $\mathcal{A}$ egy X halmazbeli σ-algebra, és legyen $Y \subset X$. Igazolja, hogy a $\mathcal{B} := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazrendszer egy Y-beli σ-algebra. Mutassa meg, hogy $Y \in \mathcal{A}$ esetén $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$.

11. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ esetén $\varepsilon_1(A) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \in A \\ 0, & \text{ha } 1 \notin A \end{cases}$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \varepsilon_1)$ egy valószínűségi mező.

12. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, és legyen $B \in \mathcal{A}$, amelyre $P(B) > 0$. Legyen $\mathcal{B} := \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ és $P_B(A \cap B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $(A \in \mathcal{A})$. Igazolja, hogy a $(B, \mathcal{B}, P_B)$ egy valószínűségi mező.